

CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA
Algebra n.1
Anno Accademico 2022/23

Appello del 6 giugno 2023

1. Siano date, in S_{19} , le permutazioni

$$\begin{aligned}\sigma &= (1, 2, 3, 4)(5, 6, 7, 8)(9, 10, 11, 12, 13)(14, 15, 16, 17, 18, 19), \\ \tau &= (1, 3)(2, 4)(5, 7)(6, 8)(9, 10, 11, 12, 13)(14, 19, 18, 17, 16, 15).\end{aligned}$$

Si consideri, inoltre, il sottogruppo $C(\sigma) = \{\alpha \in S_{19} \mid \alpha\sigma = \sigma\alpha\}$.

- (a) Determinare $\langle \sigma \rangle \cap \langle \tau \rangle$.
- (b) Provare che $C(\sigma) \cap C(\tau)$ contiene un sottogruppo di ordine 120.

2.

- (a) Determinare l'insieme dei numeri interi n per i quali il numero $n^3 - 5n^2 - 8n + 12$ è divisibile per 125.
- (b) Determinare l'insieme dei numeri interi n per i quali il numero $n^3 - 9n^2 + 20n - 12$ è divisibile per 90.
- (c) Dire se l'applicazione seguente è surgettiva:

$$\begin{aligned}\varphi: \mathbb{Z}_{257} &\rightarrow \mathbb{Z}_{257} \\ \alpha &\mapsto \alpha^{15} - 3\alpha^{10} + 3\alpha^5 - \bar{1}\end{aligned}$$

3. Dato un numero primo p maggiore di 2, si considerino i seguenti polinomi di $\mathbb{Z}_p[x]$:

$$f(x) = x^{p^3} - x^{p^2} + x - \bar{1},$$

$$g(x) = x^p - \bar{1},$$

$$h(x) = x^{p^2} + \bar{2}.$$

- (a) Determinare, al variare di p , il resto della divisione euclidea di $f(x)$ per $g(x)$.
- (b) Determinare, al variare di p , il resto della divisione euclidea di $f(x)$ per $h(x)$.