

**CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA**

**Algebra n.1**

**Anno Accademico 2022/23**

**Appello del 17 aprile 2023**

1. Siano date in  $S_{19}$  le seguenti due permutazioni:

$$\sigma = (1, 2, 3)(4, 6)(5, 7)(8, 9, 10, 11, 12)(13, 14, 15, 16, 17, 18, 19)$$

$$\tau = (1, 3, 2)(4, 5, 6, 7)(8, 10, 12, 9, 11)(13, 19, 18, 17, 16, 15, 14).$$

(a) Determinare  $\langle \sigma \rangle \cap \langle \tau \rangle$ .

(b) Determinare tutti gli interi  $n$  tali che  $\langle \tau^n \rangle \cap \langle \tau^{52} \rangle = \{\text{id}\}$ .

2. Dato un intero  $n$  maggiore di 1, si considerino le applicazioni

$$\begin{aligned} \varphi_n : \mathbb{Z}_n &\rightarrow \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n \\ \alpha &\mapsto (2\alpha, 11\alpha) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \omega_n : \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n &\rightarrow \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n \\ (\alpha, \beta) &\mapsto (2\alpha, 11\beta) \end{aligned}$$

(a) Determinare l'insieme dei valori di  $n$  per i quali  $\varphi_n$  è iniettiva.

(b) Determinare  $|\text{Im } \omega_{385}|$ .

3. Sia  $p > 2$  un numero primo. Si considerino i seguenti polinomi di  $\mathbb{Z}_p[x]$ :

$$f(x) = x^{3p} + x^{2p} + x^p + \overline{1},$$

$$g(x) = x^{2p} - \overline{1},$$

$$h(x) = x^{80p} - \overline{1}.$$

(a) Determinare, al variare di  $p$ , il numero delle radici distinte di  $f(x)$  in  $\mathbb{Z}_p$ .

(b) Determinare  $\text{MCD}(f(x), g(x))$ .

(c) Determinare il resto della divisione di  $h(x)$  per  $f(x)$ .