

**CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA**  
**Algebra n.1**  
**Anno Accademico 2022/23**

**Appello del 17 aprile 2023**

1. Siano date in  $S_{19}$  le seguenti due permutazioni:

$$\begin{aligned}\sigma &= (1,2,3)(4,6)(5,7)(8,9,10,11,12)(13,14,15,16,17,18,19) \\ \tau &= (1,3,2)(4,5,6,7)(8,10,12,9,11)(13,19,18,17,16,15,14).\end{aligned}$$

- (a) Determinare  $\langle \sigma \rangle \cap \langle \tau \rangle$ .  
(b) Determinare tutti gli interi  $n$  tali che  $\langle \tau^n \rangle \cap \langle \tau^{52} \rangle = \{\text{id}\}$ .

2. Dato un intero  $n$  maggiore di 1, si considerino le applicazioni

$$\begin{array}{ll}\varphi_n : \mathbb{Z}_n \rightarrow \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n & \omega_n : \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n \rightarrow \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n \\ \alpha \mapsto (2\alpha, 11\alpha) & (\alpha, \beta) \mapsto (2\alpha, 11\beta)\end{array}$$

- (a) Determinare l'insieme dei valori di  $n$  per i quali  $\varphi_n$  è iniettiva.  
(b) Determinare  $|\text{Im } \omega_{385}|$ .

3. Sia  $p > 2$  un numero primo. Si considerino i seguenti polinomi di  $\mathbb{Z}_p[x]$ :

$$\begin{aligned}f(x) &= x^{3p} + x^{2p} + x^p + \bar{1}, \\ g(x) &= x^{2p} - \bar{1}, \\ h(x) &= x^{80p} - \bar{1}.\end{aligned}$$

- (a) Determinare, al variare di  $p$ , il numero delle radici distinte di  $f(x)$  in  $\mathbb{Z}_p$ .  
(b) Determinare  $\text{MCD}(f(x), g(x))$ .  
(c) Determinare il resto della divisione di  $h(x)$  per  $f(x)$ .