

CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA

Algebra n.1

Anno Accademico 2022/23

Appello del 10 febbraio 2023

1. Siano date in S_{25} le seguenti due permutazioni:

$$\sigma = (1,2)(3,4)(5,6)(7,8,9,10,11,12)(13,14,15,16,17)(18,19,20)(22,23,24,25,21),$$

$$\tau = (1,2)(3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13)(14,15,16,17,18,19,20)(21,24,22,25,23).$$

Sia, inoltre, $C(\sigma) = \{\alpha \in S_{25} \mid \alpha\sigma = \sigma\alpha\}$.

- (a) Determinare $\langle \sigma \rangle \cap \langle \tau \rangle$.
- (b) Determinare un sottogruppo ciclico H di S_{25} avente ordine 12 e tale che $H \cap C(\sigma) \neq \{\text{id}\}$.
- (c) Determinare un sottogruppo non commutativo K di S_{25} avente ordine 12 e tale che $K \cap \langle \tau \rangle \neq \{\text{id}\}$.
- 2.
- (a) Dire se esiste un omomorfismo di anelli iniettivo da \mathbb{Z}_{20} a \mathbb{Z}_{100} .
- (b) Determinare gli ordini di tutti i sottogruppi ciclici di $\mathbb{Z}_{20} \times \mathbb{Z}_{100}$.

3. Sia p un numero primo positivo. Si considerino i seguenti polinomi di $\mathbb{Z}_p[x]$:

$$f(x) = x^{p^4} - x^{p^2} + x^p - \bar{1},$$

$$g(x) = x^{p^3} - x^{p^2} - x^2 + \bar{1},$$

$$h(x) = x^{p^3} - \bar{1}.$$

- (a) Determinare $\text{MCD}(f(x), h(x))$.
- (b) Determinare $\text{MCD}(g(x), h(x))$.