

CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA
Algebra n.1
Anno Accademico 2022/23

Appello del 10 febbraio 2023

1. Siano date in S_{25} le seguenti due permutazioni:

$$\begin{aligned}\sigma &= (1,2)(3,4)(5,6)(7,8,9,10,11,12)(13,14,15,16,17)(18,19,20)(22,23,24,25,21), \\ \tau &= (1,2)(3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13)(14,15,16,17,18,19,20)(21,24,22,25,23).\end{aligned}$$

Sia, inoltre, $C(\sigma) = \{\alpha \in S_{25} \mid \alpha\sigma = \sigma\alpha\}$.

- (a) Determinare $\langle \sigma \rangle \cap \langle \tau \rangle$.
(b) Determinare un sottogruppo ciclico H di S_{25} avente ordine 12 e tale che $H \cap C(\sigma) \neq \{\text{id}\}$.
(c) Determinare un sottogruppo non commutativo K di S_{25} avente ordine 12 e tale che $K \cap \langle \tau \rangle \neq \{\text{id}\}$.
- 2.
- (a) Dire se esiste un omomorfismo di anelli iniettivo da \mathbb{Z}_{20} a \mathbb{Z}_{100} .
(b) Determinare gli ordini di tutti i sottogruppi ciclici di $\mathbb{Z}_{20} \times \mathbb{Z}_{100}$.
3. Sia p un numero primo positivo. Si considerino i seguenti polinomi di $\mathbb{Z}_p[x]$:

$$\begin{aligned}f(x) &= x^{p^4} - x^{p^2} + x^p - 1, \\ g(x) &= x^{p^3} - x^{p^2} - x^2 + 1, \\ h(x) &= x^{p^3} - 1.\end{aligned}$$

- (a) Determinare $\text{MCD}(f(x), h(x))$.
(b) Determinare $\text{MCD}(g(x), h(x))$.