CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA

Algebra n.1

Anno Accademico 2022/23

Appello del 26 gennaio 2023

1. Siano date, in S_{19}, le permutazioni

$$\sigma = (1,2,3,4,5)(6,7,8,9)(10,11,12,13,14,15,16)(17,18,19),$$
$$\tau = (1,3,2,4,5)(6,8,7,9)(10,11,13,12,14,15,16)(17,19,18).$$

(a) Determinare $\langle\sigma\rangle \cap \langle\tau\rangle$.

(b) Determinare un sottogruppo H di S_{19} avente ordine 16 e tale che $H \cap \langle\sigma\rangle \neq \{\mathrm{id}\}$.

(c) Determinare un sottogruppo K di S_{19} avente ordine 22 e tale che $K \cap \langle\sigma\rangle \neq \{\mathrm{id}\}$.

2.

(a) Provare che per ogni omomorfismo di gruppi $\varphi : \mathbb{Z}_{20} \times \mathbb{Z}_{42} \to \mathbb{Z}_{35}$ si ha che 12 divide $|\mathrm{Ker}\,\varphi|$.

(b) Dire, giustificando la risposta, se esista un epimorfismo di gruppi da $\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_{20}$ a $\mathbb{Z}_8$.

3. Dato un numero primo $p \neq 3$, sia $f(x) = x^{p^3} + x^{p^2} + x + \bar{1} \in \mathbb{Z}_p[x]$.

(a) Determinare, al variare di p, il resto della divisione euclidea di $f(x)$ per $g(x) = x + \bar{3}^{-1}$.

(b) Determinare, al variare di p, il resto della divisione euclidea di $f(x)$ per $h(x) = x^{p^2} + x^p + x + \bar{1}$.