

CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA

Algebra n.1

Anno Accademico 2022/23

Appello del 9 gennaio 2023

1. Siano date, in S_{20} , le permutazioni

$$\sigma = (1, 2, 3)(4, 5, 6, 7, 8, 9)(10, 11, 12, 13, 14, 15, 16)(17, 18, 19, 20),$$

$$\tau = (1, 3, 2)(4, 7)(5, 8)(6, 9)(10, 12, 14, 16, 11, 13, 15)(17, 19)(18, 20).$$

Sia, inoltre, $C(\sigma) = \{\alpha \in S_{20} \mid \alpha\sigma = \sigma\alpha\}$.

(a) Determinare $\langle \sigma \rangle \cap \langle \tau \rangle$.

(b) Provare che $C(\sigma) \cap C(\tau)$ contiene un sottogruppo di ordine 24.

(c) Provare che $C(\sigma) \cap C(\tau)$ contiene un sottogruppo di ordine 9.

2.

(a) Provare che esistono almeno due omomorfismi di gruppi non banali da $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_5$ a \mathbb{Z}_{10} .

(b) Determinare un epimorfismo di anelli da $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_5$ a \mathbb{Z}_{10} .

(c) Determinare l'insieme delle coppie (m, n) per le quali la seguente applicazione è ben definita, e determinare una coppia che la rende surgettiva:

$$\begin{aligned} \varphi: \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_5 &\rightarrow \mathbb{Z}_{10} \\ \varphi([a]_4, [b]_5) &\rightarrow [ma + nb]_{10} \end{aligned}$$

3. Dato un numero primo $p > 2$, si considerino i seguenti polinomi di $\mathbb{Z}_p[x]$:

$$f(x) = x^p + x^{p-1} - x - \bar{1},$$

$$g(x) = x^4 - x^3 - x^2 + x.$$

Determinare, al variare di p , $\text{MCD}(f(x), g(x))$.