

CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA

Algebra n.1

Anno Accademico 2021/22

Appello del 5 settembre 2022

1. Data, in S_{20} , la permutazione

$$\sigma = (1, 2, 3)(4, 5, 6)(7, 8, 9, 10, 11, 12)(13, 14, 15, 16)(17, 18, 19, 20),$$

si consideri il suo centralizzante $C(\sigma) = \{\alpha \in S_{20} \mid \alpha\sigma = \sigma\alpha\}$.

(a) Provare che $C(\sigma)$ contiene due distinti sottogruppi di ordine 48.

(b) Determinare un sottogruppo H di S_{20} avente ordine 48 e tale che $\sigma \in H$.

2. Dati gli interi m, n , maggiori di 1, si consideri l'applicazione

$$\varphi: \mathbb{Z}_n \rightarrow \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$$

tale che, per ogni $a \in \mathbb{Z}$, $\varphi([a]_n) = ([na]_m, [a]_n)$.

(a) Determinare l'insieme delle coppie (m, n) per le quali φ è ben definita.

(b) Determinare $|\text{Im } \varphi|$ al variare di n ed m .

(c) Determinare l'insieme delle coppie (m, n) per le quali φ è un omomorfismo di anelli.

3. Dati un numero primo positivo p , ed un intero n maggiore di 1, si considerino i seguenti polinomi di $\mathbb{Z}_p[x]$:

$$f(x) = \sum_{i=0}^{p^2-p-1} x^i,$$

$$g(x) = \sum_{i=0}^{n-1} x^i.$$

(a) Determinare, al variare di p , le radici di $f(x)$ in \mathbb{Z}_p , con le rispettive molteplicità.

(b) Determinare, al variare di p ed n , il numero delle radici distinte di $g(x)$ in \mathbb{Z}_p .