

**CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA**

**Algebra n.1**

**Anno Accademico 2021/22**

**Appello del 6 luglio 2022**

1. Data, in  $S_{22}$ , la permutazione

$$\sigma = (1, 2, 3, 4, 5)(6, 7, 8, 9, 10)(11, 12, 13, 14)(15, 16, 17, 18)(19, 20)(21, 22),$$

si consideri il suo centralizzante  $C(\sigma) = \{\alpha \in S_{22} \mid \alpha\sigma = \sigma\alpha\}$ .

(a) Determinare due sottogruppi  $H$  e  $K$  di  $S_{22}$  aventi ordine 40 e tali che

$$H \cap K = \langle \sigma \rangle.$$

(b) Determinare un sottogruppo di  $S_{22}$  avente ordine 320 e contenente  $\langle \sigma \rangle$ .

(c) Determinare un sottogruppo di  $S_{22}$  avente ordine 64 e contenuto in  $C(\sigma)$ .

2. Data una coppia di interi  $(m, n)$ , si consideri l'applicazione

$$\varphi: \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_7 \rightarrow \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{21},$$

tale che, per ogni  $a, b \in \mathbb{Z}$ ,  $\varphi([a]_6, [b]_7) = ([ma + nb]_2, [ma + nb]_{21})$ .

(a) Determinare tutte le coppie  $(m, n)$  per le quali  $\varphi$  è ben definita.

(b) Determinare una coppia  $(m, n)$  tale che  $\varphi$  sia un isomorfismo di anelli.

3. Dati i numeri interi  $a, b, c$  ed il numero primo  $p$ , si considerino i polinomi

$$f(x) = x^3 + ax + p \in \mathbb{Z}[x],$$

$$g(x) = x^3 + bx^2 + cx + p \in \mathbb{Z}[x].$$

(a) Determinare l'insieme delle coppie  $(a, p)$  per le quali  $f(x)$  si decompone in  $\mathbb{Q}[x]$  nel prodotto di fattori lineari.

(b) Determinare, al variare di  $p$ , l'insieme delle coppie  $(b, c)$  per le quali  $g(x)$  ha tre radici razionali semplici.