

CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA
Algebra n.1
Anno Accademico 2021/22

Appello del 6 luglio 2022

1. Data, in S_{22} , la permutazione

$$\sigma = (1, 2, 3, 4, 5)(6, 7, 8, 9, 10)(11, 12, 13, 14)(15, 16, 17, 18)(19, 20)(21, 22),$$

si consideri il suo centralizzante $C(\sigma) = \{\alpha \in S_{22} \mid \alpha\sigma = \sigma\alpha\}$.

- (a) Determinare due sottogruppi H e K di S_{22} aventi ordine 40 e tali che $H \cap K = \langle \sigma \rangle$.
- (b) Determinare un sottogruppo di S_{22} avente ordine 320 e contenente $\langle \sigma \rangle$.
- (c) Determinare un sottogruppo di S_{22} avente ordine 64 e contenuto in $C(\sigma)$.

2. Data una coppia di interi (m, n) , si consideri l'applicazione

$$\varphi: \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_7 \rightarrow \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{21},$$

tale che, per ogni $a, b \in \mathbb{Z}$, $\varphi([a]_6, [b]_7) = ([ma + nb]_2, [ma + nb]_{21})$.

- (a) Determinare tutte le coppie (m, n) per le quali φ è ben definita.
- (b) Determinare una coppia (m, n) tale che φ sia un isomorfismo di anelli.

3. Dati i numeri interi a, b, c ed il numero primo p , si considerino i polinomi

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 + ax + p \in \mathbb{Z}[x], \\ g(x) &= x^3 + bx^2 + cx + p \in \mathbb{Z}[x]. \end{aligned}$$

- (a) Determinare l'insieme delle coppie (a, p) per le quali $f(x)$ si decompone in $\mathbb{Q}[x]$ nel prodotto di fattori lineari.
- (b) Determinare, al variare di p , l'insieme delle coppie (b, c) per le quali $g(x)$ ha tre radici razionali semplici.