

**CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA**  
**Algebra n.1**  
**Anno Accademico 2021/22**

**Appello del 21 giugno 2022**

1. Data, in  $S_{18}$ , la permutazione

$$\sigma = (1, 2, 3, 4, 5)(6, 7, 8, 9, 10, 11)(12, 13, 14, 15, 16, 17, 18),$$

determinare

- (a) un sottogruppo  $H$  di  $S_{18}$  avente ordine 210 e tale che  $|H \cap \langle \sigma \rangle| = 10$ ,
- (b) un sottogruppo  $K$  di  $S_{18}$  avente ordine 210 e tale che  $|K \cap \langle \sigma \rangle| = 1$ ,
- (c) il sottogruppo  $\langle \sigma^{273} \rangle \cap \langle \sigma^{435} \rangle$ .

2. Determinare l'insieme delle coppie di interi positivi  $(m, n)$  per le quali l'applicazione

$$\varphi: \mathbb{Z}_{34} \times \mathbb{Z}_{51} \rightarrow \mathbb{Z}_{17}, \text{ tale che, per ogni } a, b \in \mathbb{Z}, \quad \varphi([a]_{34}, [b]_{51}) = [a^m b^n]_{17},$$

- (a) è ben definita;
- (b) è surgettiva.

3. Dato un numero primo positivo  $p$ , si considerino i seguenti polinomi di  $\mathbb{Z}_p[x]$ :

$$f(x) = x^{p^2} + x^{2p} + \bar{1}, \quad g(x) = x^{2p} + x^p + \bar{1}.$$

- (a) Determinare, al variare di  $p$ , il numero delle radici di  $f(x)$  in  $\mathbb{Z}_p$ .
- (b) Determinare tutti i valori di  $p$  tali che  $f(x)$  sia divisibile per  $g(x)$ .