

CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA

Algebra n.1

Anno Accademico 2021/22

Appello del 21 giugno 2022

1. Data, in S_{18} , la permutazione

$$\sigma = (1, 2, 3, 4, 5)(6, 7, 8, 9, 10, 11)(12, 13, 14, 15, 16, 17, 18),$$

determinare

- (a) un sottogruppo H di S_{18} avente ordine 210 e tale che $|H \cap \langle \sigma \rangle| = 10$,
- (b) un sottogruppo K di S_{18} avente ordine 210 e tale che $|K \cap \langle \sigma \rangle| = 1$,
- (c) il sottogruppo $\langle \sigma^{273} \rangle \cap \langle \sigma^{435} \rangle$.

2. Determinare l'insieme delle coppie di interi positivi (m, n) per le quali l'applicazione

$$\varphi: \mathbb{Z}_{34} \times \mathbb{Z}_{51} \rightarrow \mathbb{Z}_{17}, \text{ tale che, per ogni } a, b \in \mathbb{Z}, \varphi([a]_{34}, [b]_{51}) = [a^m b^n]_{17},$$

- (a) è ben definita;
- (b) è surgettiva.

3. Dato un numero primo positivo p , si considerino i seguenti polinomi di $\mathbb{Z}_p[x]$:

$$f(x) = x^{p^2} + x^{2p} + \bar{1}, \quad g(x) = x^{2p} + x^p + \bar{1}.$$

- (a) Determinare, al variare di p , il numero delle radici di $f(x)$ in \mathbb{Z}_p .
- (b) Determinare tutti i valori di p tali che $f(x)$ sia divisibile per $g(x)$.