

CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA

Algebra n.1

Anno Accademico 2021/22

Appello del 20 aprile 2022

1. Data, in S_{10} , la permutazione

$$\sigma = (1, 2)(3, 4)(5, 6)(7, 8, 9, 10),$$

si consideri il suo centralizzante $C(\sigma) = \{\alpha \in S_{10} \mid \alpha\sigma = \sigma\alpha\}$.

(a) Provare che $C(\sigma)$ ha almeno 40 elementi di periodo al più 2.

(b) Determinare un sottogruppo H di S_{10} avente ordine 10 e tale che $H \cap C(\sigma) \neq \{\text{id}\}$.

(c) Determinare un sottogruppo di S_{10} avente ordine 12 e contenente $\langle \sigma \rangle$.

2. Determinare gli insiemi degli interi n tali che

(a) il numero $n^{104} + n^{303} - 6n^{1202}$ sia divisibile per 125;

(b) il numero $n^{184} + n^{363} - 6n^{1226}$ sia divisibile per 108.

3. Dato p un numero primo positivo, si considerino i polinomi

$$f(x) = x^p - x^{p-1} + x^{p-2} \in \mathbb{Z}_p[x],$$

$$g(x) = x^p - \bar{2} \in \mathbb{Z}_p[x].$$

(a) Determinare, al variare di p , il numero di radici multiple di $f(x)$ in \mathbb{Z}_p , con le rispettive molteplicità.

(b) Determinare, al variare di p , $\text{MCD}(f(x), g(x))$.