

CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA
Algebra n.1
Anno Accademico 2021/22

Appello dell'11 febbraio 2022

1. Siano date, in S_{22} , le seguenti due permutazioni:

$$\begin{aligned}\sigma &= (1, 2, 3)(4, 5, 6)(7, 8, 9)(10, 11, 12, 13, 14, 15, 16)(17, 18)(19, 20)(21, 22) \\ \tau &= (1, 4, 7, 2, 6, 8, 3, 5, 9)(10, 12, 14, 16, 11, 15, 13)(17, 18, 19, 20)(21, 22).\end{aligned}$$

- (a) Determinare $\langle \sigma \rangle \cap \langle \tau \rangle$.
- (b) Posto $C(\sigma) = \{\alpha \in S_{22} \mid \alpha\sigma = \sigma\alpha\}$, dire se il gruppo $C(\sigma) \cap C(\tau)$ è ciclico.

2. Dato un numero primo positivo p , si consideri l'applicazione

$$\begin{aligned}\varphi_p : \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_{101} &\rightarrow \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_{101} \\ (\alpha, \beta) &\mapsto (\alpha^{101}, \beta^p)\end{aligned}$$

- (a) Dire se φ_{43} è bigettiva.
- (b) Determinare $|\varphi_5^{-1}([1]_5, [1]_{101})|$.
- (c) Determinare $|\text{Im } \varphi_2|$.

3. Dato un numero primo positivo p , si considerino i seguenti polinomi di $\mathbb{Z}_p[x]$:

$$\begin{aligned}f(x) &= \overline{1} - \sum_{i=0}^{18} x^{p^i}, \\ g(x) &= \overline{1} + \sum_{i=2}^{19} x^{p^i}.\end{aligned}$$

- (a) Determinare tutti i valori di p per i quali $f(x)$ e $g(x)$ possiedono in \mathbb{Z}_p radici comuni, e trovare tali radici.
- (b) Determinare il resto della divisione euclidea di $g(x)$ per $f(x)$.