

**CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA**

**Algebra n.1**

**Anno Accademico 2021/22**

**Appello dell'11 febbraio 2022**

1. Siano date, in  $S_{22}$ , le seguenti due permutazioni:

$$\sigma = (1, 2, 3)(4, 5, 6)(7, 8, 9)(10, 11, 12, 13, 14, 15, 16)(17, 18)(19, 20)(21, 22)$$

$$\tau = (1, 4, 7, 2, 6, 8, 3, 5, 9)(10, 12, 14, 16, 11, 15, 13)(17, 18, 19, 20)(21, 22).$$

(a) Determinare  $\langle \sigma \rangle \cap \langle \tau \rangle$ .

(b) Posto  $C(\sigma) = \{ \alpha \in S_{22} \mid \alpha\sigma = \sigma\alpha \}$ , dire se il gruppo  $C(\sigma) \cap C(\tau)$  è ciclico.

2. Dato un numero primo positivo  $p$ , si consideri l'applicazione

$$\begin{aligned} \varphi_p : \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_{101} &\rightarrow \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_{101} \\ (\alpha, \beta) &\mapsto (\alpha^{101}, \beta^p) \end{aligned}$$

(a) Dire se  $\varphi_{43}$  è bigettiva.

(b) Determinare  $|\varphi_5^{-1}([1]_5, [1]_{101})|$ .

(c) Determinare  $|\text{Im } \varphi_2|$ .

3. Dato un primo positivo  $p$ , si considerino i seguenti polinomi di  $\mathbb{Z}_p[x]$ :

$$f(x) = \bar{1} - \sum_{i=0}^{18} x^{p^i},$$

$$g(x) = \bar{1} + \sum_{i=2}^{19} x^{p^i}.$$

(a) Determinare tutti i valori di  $p$  per i quali  $f(x)$  e  $g(x)$  possiedono in  $\mathbb{Z}_p$  radici comuni, e trovare tali radici.

(b) Determinare il resto della divisione euclidea di  $g(x)$  per  $f(x)$ .