CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA

Algebra n.1

Anno Accademico 2021/22

Appello del 10 gennaio 2022

1. Siano date le seguenti permutazioni di S_{15} :

$$\sigma = (1,2,3,4)(5,6,7,8,9,10)(11,12,13,14,15)$$
$$\tau = (1,4,3,2)(5,8)(6,9)(7,10)(11,14,15,12,13).$$

(a) Determinare un generatore di $\langle\sigma\rangle \cap \langle\tau\rangle$.

(b) Detto $C(\sigma)$ il sottogruppo degli elementi di S_{15} che commutano con σ, provare che $C(\sigma) \cap C(\tau)$ ha almeno 24 elementi.

2.

(a) Dire se gli anelli $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_{12}$ e $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{18}$ sono isomorfi.

(b) Dire se i gruppi $\mathbb{C}^*$ e $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$ sono isomorfi.

(c) Dire per quali interi positivi n il gruppo $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_{10}$ ha un sottogruppo ciclico di ordine n. Dire, inoltre, se $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_{10}$ possiede sottogruppi propri non ciclici.

3. Dato un primo positivo p, si considerino i seguenti polinomi di $\mathbb{Z}_p[x]$:

$$f(x) = x^{p^2} - x + 1$$
$$g(x) = x^{p+1} - x^p - x^2 + x.$$

Determinare

(a) $\mathrm{MCD}(f(x), g(x))$,

(b) il resto della divisione euclidea di $f(x)$ per $g(x)$.