

**CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA**

**Algebra n.1**

**Anno Accademico 2020/21**

**Appello del 28 settembre 2021**

1. Data, in  $S_{14}$ , la permutazione

$$\alpha = (1, 2, 3, 4)(5, 6, 7, 8)(9, 10)(11, 12)(13, 14),$$

sia  $C(\alpha) = \{\sigma \in S_{14} \mid \sigma\alpha = \alpha\sigma\}$ . Trovare, in  $C(\alpha)$ ,

- (a) un sottogruppo  $H$  di ordine 24 e ciclico,
- (b) un sottogruppo  $K$  di ordine 24 e non ciclico.

2. Siano  $p, q$  distinti primi maggiori di 2. Determinare l'insieme delle coppie  $(p, q)$  per le quali è surgettiva l'applicazione

- (a)  $\varphi: \mathbb{Z}_p^* \times \mathbb{Z}_p^* \rightarrow \mathbb{Z}_p^* \times \mathbb{Z}_p^*$  tale che, per ogni  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{Z}_p^* \times \mathbb{Z}_p^*$ ,  
 $\varphi(\alpha, \beta) = (\alpha^{2p-1}, \alpha^q \beta^{p-2})$ .
- (b)  $\psi: \mathbb{Z}_p^* \times \mathbb{Z}_q^* \rightarrow \mathbb{Z}_p^* \times \mathbb{Z}_q^*$  tale che, per ogni  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{Z}_p^* \times \mathbb{Z}_q^*$ ,  
 $\psi(\alpha, \beta) = (\alpha^{q-1}, \beta^{p-1})$ .

3. Dato un numero primo  $p$  maggiore di 2, si considerino i seguenti polinomi:

$$f(x) = x^{p^2} + x^{p-1} - x - \overline{1},$$
$$g(x) = x^{p^2-p} - x^p + x^{p-3} - \overline{1}.$$

- (a) Determinare, al variare di  $p$ , il numero delle radici comuni a  $f(x)$  e  $g(x)$  in  $\mathbb{Z}_p$ .
- (b) Posto  $p = 97$ , determinare il resto della divisione euclidea di  $f(x)$  per  $x^3 - \overline{1}$ .
- (c) Posto  $p = 421$ , dire se  $g(x)$  è divisibile per  $x^6 - \overline{1}$ .