

CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA
Algebra n.1
Anno Accademico 2020/21

Appello del 28 settembre 2021

1. Data, in S_{14} , la permutazione

$$\alpha = (1, 2, 3, 4)(5, 6, 7, 8)(9, 10)(11, 12)(13, 14),$$

sia $C(\alpha) = \{\sigma \in S_{14} \mid \sigma\alpha = \alpha\sigma\}$. Trovare, in $C(\alpha)$,

- (a) un sottogruppo H di ordine 24 e ciclico,
- (b) un sottogruppo K di ordine 24 e non ciclico.

2. Siano p, q distinti primi maggiori di 2. Determinare l'insieme delle coppie (p, q) per le quali è surgettiva l'applicazione

- (a) $\varphi: \mathbb{Z}_p^* \times \mathbb{Z}_p^* \rightarrow \mathbb{Z}_p^* \times \mathbb{Z}_p^*$ tale che, per ogni $(\alpha, \beta) \in \mathbb{Z}_p^* \times \mathbb{Z}_p^*$,
 $\varphi(\alpha, \beta) = (\alpha^{2p-1}, \alpha^q \beta^{p-2})$.
- (b) $\psi: \mathbb{Z}_p^* \times \mathbb{Z}_q^* \rightarrow \mathbb{Z}_p^* \times \mathbb{Z}_q^*$ tale che, per ogni $(\alpha, \beta) \in \mathbb{Z}_p^* \times \mathbb{Z}_q^*$,
 $\psi(\alpha, \beta) = (\alpha^{q-1}, \beta^{p-1})$.

3. Dato un numero primo p maggiore di 2, si considerino i seguenti polinomi:

$$f(x) = x^{p^2} + x^{p-1} - x - \bar{1},$$

$$g(x) = x^{p^2-p} - x^p + x^{p-3} - \bar{1}.$$

- (a) Determinare, al variare di p , il numero delle radici comuni a $f(x)$ e $g(x)$ in \mathbb{Z}_p .
- (b) Posto $p = 97$, determinare il resto della divisione euclidea di $f(x)$ per $x^3 - \bar{1}$.
- (c) Posto $p = 421$, dire se $g(x)$ è divisibile per $x^6 - \bar{1}$.