CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA

Algebra n.1

Anno Accademico 2020/21

Appello del 13 settembre 2021

1. Siano date le seguenti permutazioni di S_{19}:

$$\sigma=(1,2,3,4)(5,6)(7,8)(9,10,11,12,13)(14,15,16,17,18,19),$$
$$\tau=(1,4,3,2)(5,7)(6,8)(9,10,11,12,13)(14,17)(15,18)(16,19).$$

(a) Determinare tutti gli interi n tali che $\left|\langle\sigma^n\rangle\cap\langle\tau\rangle\right|=2.$

(b) Provare che, per ogni sottogruppo H di S_{19} tale che $\sigma,\tau\in H,$ si ha $(5,8)(6,7)\in H.$

2. Siano n, m interi maggiori di 1. Si consideri l'applicazione

$$\varphi:\mathbb{Z}_n\times\mathbb{Z}_m\to\mathbb{Z}_{2n}\times\mathbb{Z}_{2m}$$

tale che, per ogni $a,b\in\mathbb{Z},\ \varphi([a]_n,[b]_m)=([8a]_{2n},[6b]_{2m}).$

(a) Determinare tutte le coppie (n,m) per le quali φ è un omomorfismo di anelli.

(b) Determinare tutte le coppie (n,m) per le quali $\mathrm{Im}\varphi$ è un gruppo ciclico.

(c) Determinare una coppia (n,m) tale che $\mathrm{Im}\varphi$ sia un anello unitario e non integro.

3. Dato un numero primo positivo p, sia $f(x)=x^{p^2}+x^{2p}+x^p+\overline{1}\in\mathbb{Z}_p[x].$

(a) Determinare tutte le radici di $f(x)$ in $\mathbb{Z}_p,$ con le rispettive molteplicità.

(b) Determinare il resto della divisione euclidea di $f(x)$ per $x-\overline{1}.$