

CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA
Algebra n.1
Anno Accademico 2020/21

Appello del 7 luglio 2021

1. Siano date, in S_{22} , le seguenti permutazioni:

$$\begin{aligned}\sigma &= (1, 2, 3, 4, 5)(6, 7, 8, 9)(10, 11, 12, 13, 14, 15)(16, 17, 18, 19, 20, 21, 22), \\ \tau &= (1, 5, 4, 3, 2)(6, 7)(8, 9)(10, 14, 12)(11, 15, 13), (16, 18, 20, 22, 17, 19, 21).\end{aligned}$$

- (a) Determinare l'insieme degli elementi di $\langle \sigma \rangle$ che commutano con τ .
(b) Provare che, per ogni sottogruppo H di S_{22} a cui appartengono σ e τ , si ha $(6, 9)(7, 8) \in H$.

2. Determinare l'insieme degli interi n tali che

- (a) il numero $n^4 + 4n^3 - 19n^2 + 14n$ sia divisibile per 64,
(b) il numero

$$n^{2^{17981043534}} - 1$$

sia divisibile per 25.

3. Sia p un numero primo positivo. Determinare

- (a) $\text{MCD}(x^{p^2} - x, x^p - x)$ in $\mathbb{Z}_p[x]$,
(b) $\text{mcm}(x^{p+1} - x^p + x - \bar{1}, x^p + x^{p-1} - x - \bar{1})$ in $\mathbb{Z}_p[x]$,
(c) l'ordine del gruppo delle unità dell'anello $\mathbb{Z}_p[x] / (x^{p^2} - \bar{1})$.