

CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA

Algebra n.1

Anno Accademico 2020/21

Appello del 7 giugno 2021

1. Siano H e K due sottogruppi ciclici di ordine 18 in S_{18} . Determinare H e K in modo che

(a) $|H \cap K| = 1$.

(b) $|H \cap K| = 6$.

2. Dato p , un numero primo positivo, si consideri l'applicazione $\varphi: U(\mathbb{Z}_p) \rightarrow U(\mathbb{Z}_{p^2})$ tale che, per ogni $a \in \mathbb{Z}$ non divisibile per p , $\varphi([a]_p) = [a^p]_{p^2}$.

(a) Provare che φ è un omomorfismo di gruppi ben definito.

(b) Determinare il nucleo di φ .

(c) Determinare la cardinalità dell'immagine di φ .

3.

(a) Dati il numero primo positivo p ed il numero intero a non divisibile per p , determinare l'insieme delle radici razionali del polinomio $f(x) = x^4 - p^3x^3 + p^2a$.

(b) Determinare, al variare di a in \mathbb{Z} e di n in \mathbb{N}^* , una fattorizzazione del polinomio $g(x) = x^6 - a^{2n}$ in $\mathbb{Q}[x]$.