CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA

Algebra n.1

Anno Accademico 2020/21

Appello del 12 aprile 2021

1. Sia data, in S_{18}, la permutazione

$$\sigma = (1,2,3,4,5,6)(7,8,9)(10,11,12)(13,14)(15,16)(17,18).$$

Si consideri il sottogruppo $C(\sigma) = \{\rho \in S_{18} \,|\, \rho\sigma = \sigma\rho\}$.

(a) Provare che $|C(\sigma)| \geq 216$.
(b) Provare che in $C(\sigma)$ esistono almeno 40 sottogruppi di ordine 3.
(c) Dire se $C(\sigma)$ è commutativo.

2. Sia p un numero primo positivo.

(a) Determinare, al variare di p, l'insieme degli interi m per i quali l'applicazione $\varphi : \mathbb{Z}_{p^2} \to \mathbb{Z}_{p^2}$ tale che, per ogni $a \in \mathbb{Z}$, $\varphi([a]_{p^2}) = [m^2 a]_{p^2}$, è un automorfismo di anello.
(b) Sia n un intero maggiore di 1. Provare che, se è ben definita l'applicazione $\psi : \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_{n^p}$ tale che, per ogni $a \in \mathbb{Z}$, $\psi([a]_n) = [a^p]_{n^p}$, allora $n = p$. Dire se vale il viceversa.

3. Sia K un'estensione del campo $\mathbb{Z}_2$ nella quale il polinomio $f(x) = x^2 + x + \overline{1} \in \mathbb{Z}_2[x]$ possiede una radice α.

(a) Provare che $f(x)$ possiede in K una radice $\beta \neq \alpha$.
(b) Provare che $F = \{\overline{0}, \overline{1}, \alpha, \beta\}$ è un sottocampo di K.