**CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA**

# Algebra n.1

**Anno Accademico 2020/21**

**<u>Appello dell'8 febbraio 2021</u>**

1. Siano dati, in $S_n$, per qualche intero $n \geq 17$, quattro cicli disgiunti $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$, di lunghezze 2, 3, 5 e 7. Sia $\sigma = \gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4$.

(a) Dati $s, t$ interi, provare che l'intersezione $\langle \sigma^s \rangle \cap \langle \sigma^t \rangle$ è il sottogruppo banale se e solo se $210$ divide $st$.

(b) Determinare un generatore del sottogruppo $\langle \sigma^6 \rangle \cap \langle \sigma^{10} \rangle$.

2.

(a) Dato un intero maggiore $n$ di 1, si consideri l'applicazione $\varphi : \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_n$ tale che, per ogni $a \in \mathbb{Z}$, $\varphi([a]_n) = [a^3 - a]_n$. Determinare tutti i valori di $n$ per i quali $\varphi$ è un omomorfismo di gruppi.

(b) Sapendo che il numero 7919 è primo, dire se l'applicazione $\psi : \mathbb{Z}_{7919} \to \mathbb{Z}_{7919}$ tale che, per ogni $a \in \mathbb{Z}$, $\psi([a]_{7919}) = [a^3]_{7919}$, è surgettiva.

(c) Determinare l'insieme dei primi positivi $p$ per i quali l'applicazione $\vartheta : \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}_p$ tale che, per ogni $a \in \mathbb{Z}$, $\vartheta([a]_p) = [a^3 - 1]_p$, è surgettiva.

3. Sia $p$ un primo maggiore di 2. Per ognuno dei seguenti polinomi, determinare il numero delle radici (contate con le rispettive molteplicità) in $\mathbb{Z}_p$ :

(a) $f(x) = x^{p^3 - p^2 + p} - x^p$;

(b) $g(x) = x^{3p} - x^p - x^2 + \overline{1}$.