CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA

Algebra n.1

Anno Accademico 2020/21

Appello del 22 gennaio 2021

1.

(a) Siano date, in S_{24}, le permutazioni σ, di struttura ciclica $(6,5,4,3,1,1,1,1,1,1)$, e τ, di struttura ciclica $(11,7,3,3)$. Provare che l'intersezione $\langle\sigma\rangle\cap\langle\tau\rangle$ è il sottogruppo banale.

(b) Determinare, in S_{23}, due permutazioni: α, di struttura ciclica $(6,5,5,4,3)$, e β, di struttura ciclica $(10,2,2,1,1,1,1,1,1,1,1,1)$, in modo che l'intersezione $\langle\alpha\rangle\cap\langle\beta\rangle$ non sia il sottogruppo banale.

2. Siano n ed m interi maggiori di 1.

(a) Determinare tutte le coppie (n,m) tali che l'applicazione $\varphi:\mathbb{Z}_n\to\mathbb{Z}_m$ definita ponendo, per ogni $a\in\mathbb{Z}$, $\varphi([a]_n)=[4a]_m$, sia un epimorfismo di gruppi (ben definito).

(b) Determinare tutte le coppie (n,m) tali che l'applicazione $\psi:\mathbb{Z}_n\times\mathbb{Z}_m\to\mathbb{Z}_{nm}$ definita ponendo, per ogni $a,b\in\mathbb{Z}$, $\psi([a]_n,[b]_m)=[ma+nb]_{nm}$, sia un epimorfismo di gruppi.

(c) Determinare tutte le coppie (n,m) tali che l'applicazione $\vartheta:\mathbb{Z}_n\times\mathbb{Z}_{m^2}\to\mathbb{Z}_{n^2}\times\mathbb{Z}_m$ definita ponendo, per ogni $a,b\in\mathbb{Z}$, $\vartheta([a]_n,[b]_{m^2})=([na]_{n^2},[b]_m)$, abbia come immagine un gruppo ciclico.

3.

(a) Determinare l'insieme dei primi positivi p per i quali il polinomio $x^4+\overline{1}$ si decompone in $\mathbb{Z}_p[x]$ nel prodotto di fattori lineari.

(b) Sia p un *primo di Germain*, ossia un primo positivo tale che anche il numero $2p+1$ sia primo. Si consideri il polinomio $f(x)=x^p+x^2+\overline{1}\in\mathbb{Z}_{2p+1}[x]$. Provare che, se $f(x)$ ha una radice in $\mathbb{Z}_{2p+1}$, allora p è dispari e $\mathbb{Z}_{2p+1}^*=\langle\overline{2}\rangle$.