CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA

Algebra n.1

Anno Accademico 2019/20

Appello del 25 settembre 2020

1. Siano date le seguenti permutazioni di S_{18} :

$$\sigma = (1,2,3)(4,5,6,7)(8,9,10,11,12)(13,14)(15,16)(17,18),$$
$$\tau = (1,2,3,4,5,6,7)(8,9,10,11,12)(13,14,15,16)(17,18),$$
$$\rho = (1,2,3)(4,5,6,7,8)(9,10,11,12)(13,15,14,16)(17,18).$$

   (a) Determinare $\langle\sigma\rangle \cap \langle\tau\rangle \cap \langle\rho\rangle$.

   (b) Trovare un sottogruppo non ciclico H di S_{18} tale che i sottogruppi $H \cap \langle\sigma\rangle, H \cap \langle\tau\rangle, H \cap \langle\rho\rangle$ siano tutti non banali.

2. Sia n un intero maggiore di 1.

   (a) Data l'applicazione $\varphi : \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_{n^2} \times \mathbb{Z}_{n^3}$ tale che, per ogni $a, b \in \mathbb{Z}$, $\varphi([a]_n, [b]_n) = ([na]_{n^2}, [n^2 b]_{n^3})$, determinare $|\operatorname{Im}\varphi|$.

   (b) Data l'applicazione $\psi : \mathbb{Z}_{n^2} \times \mathbb{Z}_{n^3} \to \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n$ tale che, per ogni $a, b \in \mathbb{Z}$, $\psi([a]_{n^2}, [b]_{n^3}) = ([a]_n, [b]_n)$, determinare $|\psi^{-1}([0]_n, [0]_n)|$.

   (c) Dire se l'applicazione $\vartheta : \mathbb{Z}_{n^2} \times \mathbb{Z}_{n^3} \to \mathbb{Z}_{n^2} \times \mathbb{Z}_{n^3}$ tale che, per ogni $a, b \in \mathbb{Z}$, $\vartheta([a]_{n^2}, [b]_{n^3}) = ([na]_{n^2}, [b]_{n^3})$, è iniettiva.

3. Sia $f(x) = \sum_{i=0}^{100} x^{50i} \in \mathbb{Z}[x]$.

   (a) Dimostrare che la riduzione di $f(x)$ modulo 101 ha in $\mathbb{Z}_{101}$ almeno 50 radici distinte.

   (b) Determinare l'insieme delle radici in $\mathbb{Z}_5$ della riduzione di $f(x)$ modulo 5.