

CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA

Algebra n.1

Anno Accademico 2019/20

Appello del 17 febbraio 2020

1. Data in S_{16} la permutazione

$$\sigma = (1, 2, 3, 4)(5, 6, 7, 8)(9, 10)(11, 12)(13, 14)(15, 16),$$

sia $C(\sigma) = \{\alpha \in S_{16} \mid \alpha\sigma = \sigma\alpha\}$.

- (a) Dire se $C(\sigma)$ è un sottogruppo commutativo di S_{16} .
- (b) Provare che $C(\sigma)$ contiene un sottogruppo di S_{16} avente ordine 48.
- (c) Determinare una permutazione $\tau \in S_{16}$ avente periodo 16 e tale che $C(\sigma) \cap \langle \tau \rangle$ non sia il sottogruppo banale.

2.

- (a) Siano m, n interi maggiori o uguali a 2. Determinare l'insieme delle coppie (m, n) per le quali è ben definita l'applicazione $\varphi: \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n \rightarrow \mathbb{Z}_m$ tale che, per ogni $a, b \in \mathbb{Z}$,

$$\varphi([a]_m, [b]_n) = [ab]_m.$$

- (b) Sia data l'applicazione $\psi: \mathbb{Z}_{18} \times \mathbb{Z}_{18} \rightarrow \mathbb{Z}_{18}$ tale che, per ogni $a, b \in \mathbb{Z}$,

$$\psi([a]_{18}, [b]_{18}) = [2ab]_{18}.$$

Determinare $|\psi^{-1}([0]_{18})|$ e $|\psi^{-1}([9]_{18})|$.

3. Sia p un numero primo maggiore di 2.

- (a) Determinare tutte le radici in \mathbb{Z}_p del polinomio $f(x) = \sum_{i=0}^{p-2} x^i \in \mathbb{Z}_p[x]$.
- (b) Determinare, al variare di p , il resto della divisione euclidea di $g(x) = x^{p-1} + x \in \mathbb{Z}_p[x]$ per $f(x)$.