CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA

Algebra n.1

Anno Accademico 2019/20

Appello del 31 gennaio 2020

1. In S_{41} sia σ un 14-ciclo e sia τ una permutazione di periodo 30030.

   (a) Determinare $\langle\sigma\rangle\cap\langle\tau\rangle$.

   (b) Trovare σ e τ come sopra ed in modo che $\sigma^2\tau^{4290}=\tau^{4290}\sigma^2$.

2.
   (a) Determinare due distinti sottoanelli di $\mathbb{Z}_5\times\mathbb{Z}_6$ non banali e integri.

   (b) Dire se l'applicazione $\varphi:\mathbb{Z}_5\times\mathbb{Z}_6\to\mathbb{Z}_{30}$ tale che, per ogni $a,b\in\mathbb{Z}$, $\varphi([a]_5,[b]_6)=[6a+25b]_{30}$, è un omomorfismo di anelli.

   (c) Dire se φ è bigettiva, ed in caso affermativo determinarne l'inversa.

3. Dato un numero primo positivo p, si consideri il polinomio $f(x)=\prod_{\alpha\in\mathbb{Z}_p}(x^{p-1}+x^2+\alpha)\in\mathbb{Z}_p[x]$.

   (a) Determinare, al variare di p, tutte le radici di $f(x)$ in $\mathbb{Z}_p$.

   (b) Determinare $\mathrm{MCD}(f(x),x^{p-1}-\overline{1})$.