

**CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA**

**Algebra n.1**

**Anno Accademico 2018/19**

**Appello del 10 settembre 2019**

1. Determinare la cardinalità dei seguenti sottoinsiemi di  $S_6$  :

(a)  $A = \{\sigma \in S_6 \mid \sigma^{32} = \text{id}\};$

(b)  $B = \{\sigma \in S_6 \mid \sigma^{13} \neq \sigma\}.$

2. Dato un numero razionale  $\alpha$ , si consideri il sottogruppo ciclico  $\langle \alpha \rangle$  di  $\mathbb{Q}$  da esso generato.

(a) Determinare tutti i valori di  $\alpha$  per i quali  $\langle \alpha \rangle$  è un sottoanello di  $\mathbb{Q}$ .

(b) Sia  $n$  un intero maggiore di 1. Dimostrare che, per ogni epimorfismo di gruppi  $\varphi: \langle \frac{1}{n} \rangle \rightarrow \mathbb{Z}_n$ , il nucleo di  $\varphi$  è  $\mathbb{Z}$ .

(c) Determinare un omomorfismo di gruppi non banale  $\varphi: \langle \frac{1}{6} \rangle \rightarrow \mathbb{Z}_6$  il cui nucleo non sia  $\mathbb{Z}$ .

3. Dato un numero primo positivo  $p$ , si consideri il polinomio  $f(x) = x^{2p^2} - \overline{2}x^{p^2} - x^p + \overline{2} \in \mathbb{Z}_p[x]$ .

(a) Determinare tutte le radici di  $f(x)$  in  $\mathbb{Z}_p$ .

(b) Determinare  $\text{MCD}(f(x), x^{2p} - \overline{3}x^p + \overline{2})$ .