

CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA
Algebra n.1
Anno Accademico 2018/19

Appello del 10 settembre 2019

1. Determinare la cardinalità dei seguenti sottoinsiemi di S_6 :
 - (a) $A = \{\sigma \in S_6 \mid \sigma^{32} = \text{id}\}$;
 - (b) $B = \{\sigma \in S_6 \mid \sigma^{13} \neq \sigma\}$.
2. Dato un numero razionale α , si consideri il sottogruppo ciclico $\langle \alpha \rangle$ di \mathbb{Q} da esso generato.
 - (a) Determinare tutti i valori di α per i quali $\langle \alpha \rangle$ è un sottoanello di \mathbb{Q} .
 - (b) Sia n un intero maggiore di 1. Dimostrare che, per ogni epimorfismo di gruppi $\varphi: \left\langle \frac{1}{n} \right\rangle \rightarrow \mathbb{Z}_n$, il nucleo di φ è \mathbb{Z} .
 - (c) Determinare un omomorfismo di gruppi non banale $\varphi: \left\langle \frac{1}{6} \right\rangle \rightarrow \mathbb{Z}_6$ il cui nucleo non sia \mathbb{Z} .
3. Dato un numero primo positivo p , si consideri il polinomio $f(x) = x^{2p^2} - \bar{2}x^{p^2} - x^p + \bar{2} \in \mathbb{Z}_p[x]$.
 - (a) Determinare tutte le radici di $f(x)$ in \mathbb{Z}_p .
 - (b) Determinare $\text{MCD}(f(x), x^{2p} - \bar{3}x^p + \bar{2})$.