

CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA

Algebra n.1

Anno Accademico 2018/19

Appello del 20 giugno 2019

1.

- (a) Provare che in S_{17} il numero degli elementi di periodo 210 è $\frac{17!}{210}$.
- (b) Provare che in S_{13} il numero dei sottogruppi ciclici di ordine 13 è 11!.
- (c) Provare che in S_{12} il numero degli elementi di periodo 9 è $\frac{12!}{18}$.

2.

- (a) Per ogni intero a sia $\varphi(a) = a^5 - a^4 + a^3 - a^2 + a - 1$. Sia, inoltre, N un intero positivo. Determinare tutti i valori di a per i quali 2^N divide $\varphi(a)$.

- (b) Dire se l'applicazione

$$\begin{aligned} \psi : \mathbb{Z} &\rightarrow \mathbb{Z}_3 \\ a &\mapsto \left[\sum_{i=1}^{103} a^i \right]_3 \end{aligned}$$

è un omomorfismo di anelli.

3. Dato un numero primo positivo p , sia $f(x) = x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + \bar{1} \in \mathbb{Z}_p[x]$.

- (a) Determinare tutti i valori di p per i quali il numero delle radici di $f(x)$ in \mathbb{Z}_p è pari.
- (b) Provare che per nessun valore di p il polinomio $f(x)$ possiede in $\mathbb{Z}_p[x]$ un fattore di irriducibile di grado 3.