Prova scritta di Algebra n. 1
Gennaio 2009

1. Si determini la decomposizione in cicli disgiunti della permutazione

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 4 & 5 & 7 & 3 & 8 & 1 & 9 & 6 \end{pmatrix}.$$

2. Si consideri il seguente sottoinsieme di $M_2(\mathbb{Z})$:

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \middle| a, b \in \mathbb{Z} \right\}.$$

   a) Si provi che A è un sottoanello di $M_2(\mathbb{Z})$ e si dica se è commutativo e unitario.

   b) Si provi che l'applicazione $f : A \to \mathbb{Z}_{26}$ definita da $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \mapsto \overline{a - 5b} \in \mathbb{Z}_{26}$ è un omomorfismo di anelli e si dica se è surgettivo.

   c) Si determini il nucleo di f.

3. Si consideri in $\mathbb{Z}[x]$ il polinomio $f(x) = x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 3x + 2$ e sia $\overline{f}(x) \in \mathbb{Z}_3[x]$ il polinomio ottenuto da $f(x)$ riducendone i coefficienti modulo 3.

   a) Si scrivano le decomposizioni in fattori irriducibili di $f(x)$ in $\mathbb{Q}[x]$ e di $\overline{f}(x)$ in $\mathbb{Z}_3[x]$.

   b) Si dica se l'anello $B = \mathbb{Z}_3[x] / \left(\overline{f}(x)\right)$ è un campo e se ne determini l'ordine.

   c) Si provi che $[x]$ è invertibile in B e si trovi il suo inverso.