Storia e Fondamenti della Matematica
a.a. 2019/2020

Traccia d'esame – Settembre 2020 - 2

La matematica come una disciplina ad “ampio spettro”: questa visione riguarda sia la sua ricchezza strutturale, sia l’estensione del suo campo di applicabilità e la sua interazione con altri ambiti della vita culturale e del pensiero scientifico. Nel presente brano di Evangelista Torricelli (1608-1647) queste considerazioni trovano un’espressione concreta ed operativa nello studio di uno specifico problema geometrico. Presentare un’analisi del testo, utilizzando anche riferimenti ad altre fonti di questo o di altri autori, riservando una particolare attenzione ai seguenti elementi:

- l’impianto dei ragionamenti dimostrativi;
- l’aderenza ai modelli della matematica antica, nella forma e nella sostanza del discorso;
- le componenti innovative del metodo;
- la trattazione di numeri e misure.

OPERE SCELTE

di

Evangelista Torricelli

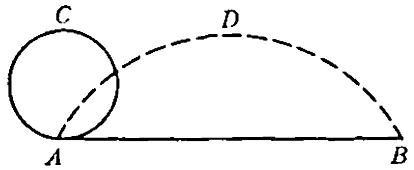
A CURA DI

LANFRANCO BELLONI

UNIONE TIPOGRAFICO-EDITRICE TORINESE

APPENDICE SULLA MISURA DELLA CICLOIDE

Mi piace qui aggiungere, come appendice, la soluzione di un problema interessante che, a prima vista, sembra difficilissimo se se ne considera l'argomento e l'enunciazione. Esso tormentò e sfuggì, molti anni or sono, ai primi matematici del nostro secolo. Infatti, la dimostrazione invano cercata sfuggì dalle loro mani a causa della fallacia dell'esperienza. Appesi infatti ad una libra, costruita a mano, gli spazi materiali delle figure, non so per quale destino, quella proporzione che in realtà è tripla, risultò sempre meno che tripla. Avvenne allora che, sospettando trattarsi di grandezze incommensurabili (come credo io) piuttosto che disperando della soluzione, la ricerca intrapresa venne da quei matematici abbandonata.



Si facciano le seguenti supposizioni. Si immagini su una linea retta fissa AB, il circolo AC, tangente alla retta AB nel punto A. E si fissi il punto A, sulla periferia del circolo. Allora si immagini di far ruotare il circolo AC sulla retta fissa AB, con moto insieme circolare e progressivo verso B, ed in modo che, negli istanti successivi, tocchi sempre la linea retta AB con un suo punto, finché il punto fissato di nuovo non torni al contatto con la linea, ad esempio in B.

È certo che il punto A, fisso sulla periferia del circolo rotante AC, descriverà qualche linea, dapprima ascendente a partire dalla linea sottostante AB, poi culminante verso D, e, in ultimo, prona e discendente verso il punto B.

Tale linea è stata chiamata *cicloide* dai nostri predecessori, soprattutto da Galileo già 45 anni or sono[1]. La retta AB

[1] A proposito delle prime ricerche sulla Cicloide, l'ellenista Carlo Dati, nella *Lettera ai Filaleti di Timauro Antiate*, scritta in difesa del Torricelli, attaccato dopo la sua scomparsa da Roberval e da Pascal, scrive che il senatore Arrighetti, vecchio amico di Galileo, si ricordava ancora

è stata chiamata *base* della cicloide, ed il circolo AC, il *generatore* della cicloide.

Discende dalla natura della cicloide la proprietà che la sua base AB sia eguale alla periferia del circolo generatore AC. E questo poi non è così oscuro. Infatti tutta la periferia AC, nella sua rotazione, si è commisurata con la retta fissa AB.

Si chiede ora che proporzione ha lo spazio cicloidale ADB al suo circolo generatore AC. Dimostreremo (e ne siano rese

della cicloide. La descriveva « figurandola simile a forte e vaga curvatura di ponte, ed affermò, ed afferma di avere sentito discorrere, o al Galileo come cosa propria, o al P. Don Benedetto Castelli come di cosa del Galileo poco dopo all'anno 1618. In confermazione di questo Vincenzo Viviani Gentiluomo Fiorentino... il quale dimorò per lo spazio di tre anni continui presso il Galileo mi ha detto averlo più volte udito discorrere della Cicloide, e particolarmente trattandosi del disegno del nuovo ponte di Pisa, quando fu proposto il farlo d'un arco solo, dicendo egli, che questa linea somministrava una centinatura per un ponte di bellissimo garbo. E che passando più oltre aveva speculato assai per misurarne lo spazio, sospettando che fosse triplo del Circolo suo genitore. Ma che avendo fatto l'esperienza di pesare la figura di cartone molto uniforme, e avendola sempre trovata meno che tripla, e dubitando che la proporzione fosse irrazionale l'abbandonò, ma però non lasciò d'esortare altri a cercarne, come pure esortò il medesimo Viviani » (vedi E. T., *Opere*, vol. I, parte II, p. 448).

Come si vede, i criteri seguiti da Galileo nella fase euristica dello studio delle proprietà di una curva non erano meno spregiudicati di quelli rivelati da Archimede nella famosa lettera sul *Metodo dei teoremi meccanici*.

Quanto all'origine cinematica della curva, come composizione di un moto retto e circolare, essa denuncia in chi la ideò una completa indipendenza dagli schemi aristotelici. Mi spiego: gli astronomi antichi, legati al pregiudizio del moto circolare codificato da Aristotele sul piano metafisico, avevano escogitato diverse curve composte di moti circolari, allo scopo di « salvare i fenomeni » del cielo. Non studiarono perciò una curva come la cicloide, in quanto nella Cicloide si compiva una indebita mistione fra moto retto (caratteristico della caduta naturale dei gravi della sfera sublunare) e moto circolare, prerogativa assoluta dei corpi celesti.

La disputa che il Torricelli ebbe col Roberval sulla Cicloide non riflette però motivi filosofici del tipo sopra accennato. Sia l'uno che l'altro geometra non ponevano limiti alla composizione cinematica dei moti. Era più che altro una delle dispute di priorità, di cui tanti esempi troviamo nel Seicento, un secolo che non aveva ancora conosciuto le pubblicazioni scientifiche periodiche. Scriveva il Torricelli a Cavalieri il 14 luglio 1646: « Faccio sapere a V. P.à come in questi giorni mi trovo due liti; una col Robervallio di Francia, il quale sfacciatissimamente e vergognosissimamente scrive aver avuto il centro di gravità della Cicloide avanti ch'io gli mandassi la dimostrazione; e non solo il centro predetto della gravità della Cicloide, ma dice che anco aveva quel metodo da me dimostrato, e mandato da me in mano sua, dove io mostravo che dato il centro di gravità e quadratura di un piano si dà il solido. Esso l'ha rivoltata, e dice che aveva il metodo di trovare il centro di gravità, data la quadratura, e il solido » (vedi E. T., *Opere*, vol. III, p. 408).

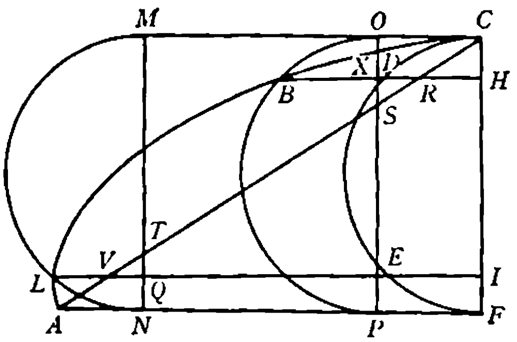
grazie a Dio) che è triplo. Le dimostrazioni saranno tre, e del tutto diverse fra loro. La prima e la terza procederanno con la nuova geometria degli indivisibili, che a noi piace molto. Mentre la seconda procederà con la duplice posizione, secondo il metodo degli antichi, onde soddisfare i fautori di entrambi i metodi. Del resto, io dico questo: quasi tutti i princìpi coi quali si dimostra qualcosa nella geometria degli indivisibili, si possono ridurre alla solita dimostrazione indiretta degli antichi. Ciò è stato da noi fatto, come in molti altri casi, anche nel primo e nel terzo dei seguenti teoremi. Tuttavia per non abusare troppo della pazienza del lettore, abbiamo ritenuto di tralasciare molte dimostrazioni e di darne soltanto tre.

TEOREMA I.

Lo spazio compreso fra la cicloide e la sua retta di base è triplo del circolo generatore. Ovvero è sesquialtero del triangolo, avente la sua stessa base ed altezza.

Sia data la cicloide *ABC*, descritta dal punto *C* del circolo *CDEF* quando ruota sulla base fissa *AF*.

Consideriamo la semicicloide ed il semicircolo soltanto per evitare troppa confusione nella figura. Dico che lo spazio *ABCF* è triplo del semicircolo *CDEF*. Ovvero sesquialtero del triangolo *ACF*.

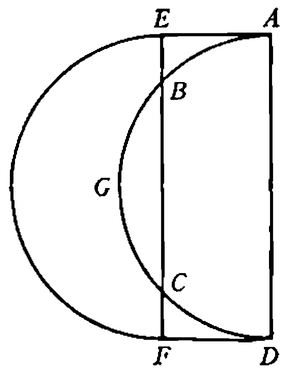


Si prendano due punti, *H* ed *I*, sul diametro *CF*, egualmente distanti dal centro *G*. Tracciate *HB*, *IL* e *CM* parallele a *FA*, passino per i punti *B* ed *L* i semicircoli *OBP* e *MLN*, eguali a *CDF*, e tangenti alla base nei punti *P* ed *N*.

È chiaro che le rette *HD*, *IE*, *XB* e *QL* sono eguali per la proposizione 14 del libro III. Saranno eguali anche gli archi *OB* e *LN*. Analogamente, essendo eguali *CH* e *IF*, saranno eguali *CR* e *UA*, per le proprietà delle rette parallele.

Tutta la periferia *MLN*, per la definizione stessa della cicloide, è eguale alla retta *AF*. Analogamente, l'arco *LN* è eguale alla retta *AN* per la medesima ragione, poiché l'arco *LN* si distenderà sulla retta *AN*. L'arco restante *LM* sarà dunque eguale alla retta restante *NF*. Per la medesima ragione, l'arco *BP* sarà eguale alla retta *AP*, e l'arco *BO* alla retta *PF*.

Ora la retta *AN* è eguale all'arco *LN*, ovvero all'arco *BO*, ovvero alla retta *PF*. Quindi, per le proprietà delle parallele, saranno eguali *AT* e *SC*. Ora, poiché erano eguali anche *CR* e *AU*, le rimanenti *UT* e *SR* saranno eguali. Perciò, nei triangoli equiangoli *UTQ* e *RSX*, saranno eguali i lati omologhi *UQ* e *XR*. È chiaro, pertanto, che le due rette *LU* e *BR*, insieme prese, saranno eguali alle due rette *LQ* e *BX*, cioè alle *EI* e *DH*. E questo sarà sempre vero, ovunque si prendano i due punti *H* ed *I*, purché siano egualmente distanti dal centro. Tutte le linee della figura *A L B C A* saranno dunque eguali a tutte le linee del semicircolo *CDEF*. Perciò la figura bilineare *ALBCA* sarà eguale al semicircolo *CDEF*.



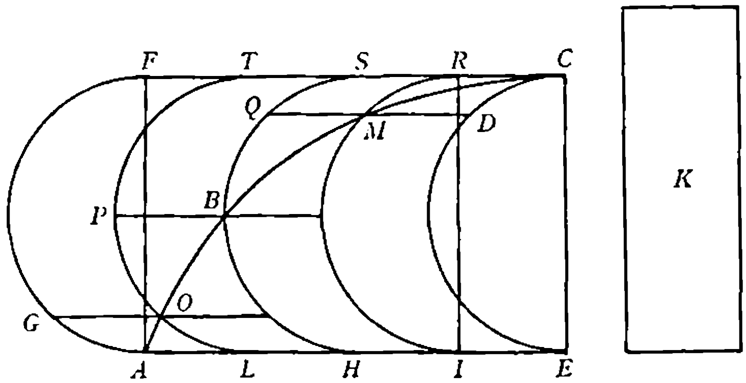
Ma il triangolo *ACF* è duplo del semicircolo *CDEF*. Infatti, il triangolo *ACF* è reciproco del triangolo della proposizione I di Archimede *della misura del circolo*, essendo il lato *AF* eguale alla semiperiferia, ed il lato *FC* eguale al diametro. Di qui segue che il triangolo *ACF* è eguale all'intero circolo di diametro *CF*. Dunque, componendo, l'intero spazio cicloidale sarà sesquialtero del triangolo inscritto *ACB*, e triplo del semicircolo *CDEF*. E questo ecc.

Lemma I.

Su lati opposti del rettangolo *AF* si descrivano i due semicircoli *EIF* e *AGD*. La figura compresa tra le loro periferie e gli altri lati sarà eguale al suddetto rettangolo.

Si chiami una figura di tal genere *arcuato*. Tale denominazione valga tanto per la figura intera, quanto per le sue parti, qualora sia divisa da una linea parallela alla FD.

Si dimostra così. Essendo i semicircoli eguali, levato il segmento comune BGC, e aggiunti i trilinei comuni EBA e CFD, risulterà chiaro quello che si voleva dimostrare.



Nel caso in cui il segmento sia nullo, allora la dimostrazione è più breve e più facile. Si mostra anche facilmente, con la stessa prostaferesi, che l'arcuato, tagliato da una linea parallela a FD, è eguale al rettangolo, avente la sua stessa altezza e costruito sulla stessa base.

Lemma II.

Sia data la cicloide ABC, descritta dal punto C del semicircolo CDE quando ruota sulla retta fissa AE. Si completi il rettangolo $AFCE$, e, attorno al diametro AF, si tracci il semicircolo AGF. Dico che la cicloide ABC taglia in due parti eguali l'arcuato $AGFCDE$.

Se infatti così non fosse, uno dei due trilinei $FGABC$ e $ABCDE$, sarebbe maggiore della metà dell'arcuato. Si supponga che uno di essi, ad esempio lo $ABCDE$, sia maggiore della metà dell'arcuato. E sia l'eccesso del trilineo, rispetto alla metà dell'arcuato, eguale allo spazio K.

Si tagli AE in due parti eguali nel punto H. Si tagli di nuovo, HE in I, e così via, finché si sarà giunti ad un rettangolo come lo IEC, minore dello spazio K. Allora, si divida l'intera AE in parti eguali alla IE. Per i punti di divisione L, H, I, passino dei semicircoli eguali al semicircolo CDE, tangenti alla base nei punti L, H, I, e secanti la cicloide nei punti O, B, M. Per questi punti si traccino le rette GO, PB, e QMD, parallele alla base AE.

L'arcuato OH sarà pertanto eguale a GL, mentre l'arcuato BI sarà eguale all'arcuato PH, e l'arcuato ME all'arcuato QI. Perciò, l'intera figura inscritta nel trilineo $ABCDE$, formata di arcuati, sarà eguale alla figura circoscritta allo stesso trilineo, ad eccezione tuttavia dell'arcuato $IMRCDE$. Che, se alla figura circoscritta si aggiungesse l'arcuato $IMRCDE$, essa supererebbe quella inscritta per un eccesso eguale al predetto arcuato, ovvero al rettangolo RE. Cioè, per un eccesso minore dello spazio K. Perciò, la figura inscritta nel trilineo sarà ancora maggiore della metà dell'arcuato $AGFCDE$, e dunque maggiore del trilineo $FGABC$. Ma essa è eguale all'altra figura composta di arcuati e inscritta nel trilineo $FGABC$. Questa figura inscritta sarebbe, quindi, maggiore del suo trilineo $FGABC$. La parte sarebbe maggiore del suo tutto, ma ciò non può essere.

Che le figure inscritte siano eguali è chiaro. Infatti, l'arco OL è eguale alla retta LA, ovvero alla retta IE, ovvero all'arco RM per le proprietà della cicloide. Quindi, l'arcuato OH sarà eguale all'arcuato MS, e così per tutti gli altri.

Se invece si suppone che il trilineo $FGABC$ sia maggiore della metà dell'arcuato $AGFCDE$, la costruzione della figura e la dimostrazione sono del tutto analoghe. Concluderemo quindi che la cicloide ABC taglia in due parti eguali l'arcuato $AGFCDE$. E questo ecc.

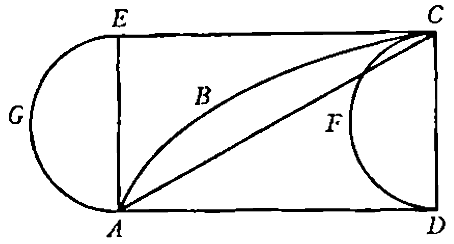
Teorema 2.

Lo spazio cicloidale è triplo del suo circolo generatore.

Sia data la cicloide ABC, descritta dal punto C del circolo CFD. Dico che lo spazio $ABCD$ è triplo del semicircolo CFD.

Si completi il rettangolo $ADCE$, e, descritto sopra AE il semicircolo AGE, si tracci AC.

Il triangolo *ADC* è duplo del semicircolo *CFD*. Infatti la base *AD* è eguale alla periferia *CFD*, per le proprietà della cicloide. Mentre l'altezza è uguale al diametro *DC*.



Perciò il rettangolo *ED* sarà quadruplo del semicircolo *CFD*.

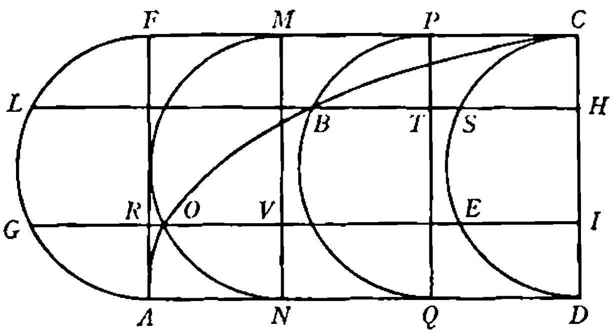
L'arcuato *AGECFD* sarà dunque quadruplo dello stesso semicircolo. Perciò, il trilineo *ABCFD*, per il lemma precedente, sarà duplo del semicircolo. E, componendo, lo spazio *ABCE* sarà triplo del semicircolo *CFD*.

Teorema 3.

Ogni spazio cicloidale è triplo del circolo suo generatore.

Sia data la cicloide *ABC*, descritta dal punto *C* del semicircolo *CED*. Dico che lo spazio *ABCD* è triplo del semicircolo *CED*.

Si completi il rettangolo *AFCD*. Tracciato il semicircolo *AGF*, si prendano i due punti *H* ed *I* sul diametro *CD*,



egualmente distanti dal centro. Si traccino *HL* e *IG* parallele ad *AD*, ed esse taglino la cicloide nei due punti, *B* ed *O*. Si traccino, infine, per *B* e per *O*, due semicircoli *PBQ* e *MON*, come si è fatto nelle precedenti proposizioni. Ora, la retta *GO* è eguale alla retta *RU*, essendo *GR* ed *OU* eguali, e *RO* in comune. Ovvero è eguale alla retta *AN*, cioè all'arco *ON*, per le proprietà della cicloide, ovvero all'arco *PB*, o alla retta *PC*, o *TH*, o *BS*.

In modo del tutto analogo a quello con cui avevamo dimostrato che la retta *GO* è eguale alla retta *BS*, si dimostra che tutte le linee del trilineo *FGABC*, sono eguali, ad una ad una, a tutte le linee del trilineo *ABCED*. Perciò i detti trilinei saranno tra loro eguali. Dunque, come nel precedente teorema, si dimostrerà che lo spazio cicloidale è triplo del semicircolo *CED*. E questo ecc.