Storia e Fondamenti della Matematica
a.a. 2019/2020

Traccia d'esame – Giugno 2020 - 3

Matematica e meccanica: i fenomeni fisici osservati trovano un'espressione quantitativa e qualitativa in termini di spazio e tempo e di altre grandezze misurabili. Analizzare il presente brano di Carlo G. Lauberg (*Memoria sull'unità dei principi della meccanica*), trattando in particolare i seguenti aspetti, alla luce di altre parti della stessa opera o di altre fonti di altri autori:

- il concetto di *principio* ed il suo uso nella costruzione/trasmissione della conoscenza;
- il ruolo del *modello* nella descrizione della realtà sensibile;
- il linguaggio geometrico e la funzione delle designazioni letterali e del diagramma;
- l'utilizzo della proporzione e dell'uguaglianza.

Nota: per il terzo punto può essere utile presentare esplicitamente un'immagine costruita sulla base del testo.

= Laubberg =

MEMORIA

SULL' UNITA' DEI PRINCIPJ DELLA MECCANICA

ARTICOLO IV.

Della invenzione di una sola forza, il di cui momento adequi quello di altre, cioè della composizione, e della risoluzione delle forze.

PRocediamo col metodo il più ſemplice, ed il più diretto in queſta ricerca, ed incominciamo da tre forze applicate ad un punto.

PROBLEMA IV.

Date due forze ritrovare la terza, che gli ſia equivalente.

LA forza equivalente a due altre applicate ad un punto, dovendo eſſere nel medeſimo piano di queſte due, ſi ſtabiliſcano i due aſſi normali BCM, LC (1) nel piano delle direzioni delle date forze CD, CG, e ſopra i medeſimi aſſi ſi abbaſſino dai punti D, G, le normali DB, DF, GM, GH; i momenti della forza CD relativamente a queſti aſſi ſaranno DB, BC, e quei della forza CG ſaranno CM, MG. Di queſti momenti i due coſpiranti ſono BD, MG, e gli oppoſti CB, CM. Dovendo dunque la forza compoſta avere la ſteſſa ſomma, e la ſteſſa differenza di momenti relativamente a queſti aſſi, è chiaro, che ſe ſi prenda $CL = BD + MG$, e $CA = CB - CM$, e per i punti A, L ſi conducano le parallele AT, LT agli aſſi, ſarà CT la forza equivalente alle altre due CD, CG.

E' neceſſario ora ſapere, unite le rette DT, TG che figura ſia la DCGT. Eſſendo perfettamente eguali i due triangoli DET, CMG, per eſſer $DE = CM$, $ET = MG$, ſarà DT eguale, e parallela a CG, e la figura CDTG ſarà un parallelogrammo.

OSSERVAZIONE.

ED ecco dimoſtrata in una maniera diretta, e luminoſa la proprietà del parallelogrammo delle forze, la quale tuttocchè ſia la proprietà la più elementare della Meccanica, pure ha finora inviluppato per la ſua dimoſtrazione i migliori Autori. Per dimoſtrare direttamente queſta verità, conveniva eſaminare quali porzioni delle due forze coſpirano, e quali ſi diſtruggono nella produzione della forza compoſta: con ogni altro metodo non ſi viene in cognizione della geneſi della forza compoſta, e le dimoſtra-

(1) *Fig.* 3.

ſtrazioni finora date di tale propoſizione, ſono piuttoſto dimoſtrazioni ſintetiche di una verità già conoſciuta, che puri raziocinj analitici diretti all' invenzione di eſſa.

I principj precedentemente ſtabiliti ſono così fecondi di conſeguenze, che ſenza fare una lunga ſerie di Teoremi, premeſſi da noi per la ſola univerſalità de' principj ſi può dedurre il Teorema della compoſizione delle forze dal Teorema I. Infatti ſia BACD (1) un parallelogrammo, ſi produca il lato AC comunque in F, e ſi faccia l' angolo EFA=BAD, FG= FA, e GH=AB, e parallela ad EA. Si conſideri ora l' effetto delle forze facendo girare la linea infleſſibile FA, che ſi ſupponga rivolgerſi intorno ad F. Primieramente la forza AC è inutile per queſto movimento rotatorio, perchè non s' impiega, che contro il punto d' appoggio; dunque reſtano le due forze BA, AD. Ma queſte forze AD, AB, o ſia GH ſono nella ragione di queſte rette, cioè per la ſomiglianza dei triangoli BAD, FAE nella ragione di FA: FE, o di FG: FE; dunque la forza per AD ſta alla forza per GH, o ſia per AB come GF: FE, cioè nella ragione inverſa delle diſtanze, e perciò tali forze ſono in equilibrio. Dunque le due forze BA, AC ſono equivalenti alla media AD. Ci ſono pure altri metodi onde derivare da precedenti principj la medeſima dimoſtrazione, che per brevità ſi tralaſciano.

Se ora ſieno applicate ad un corpo diverſe forze, per ritrovar la forza riſultante; diverſi Autori hanno ſtimato che conveniſſe comporre a due a due ſucceſſivamente le forze, per venire alla forza compoſta; ma queſto metodo ſebbene geometrico, ha l'inconveniente di eſſer lungo, e di non dare una formola eſprimente queſta forza compoſta, la di cui eſpreſſione ſpeſſo nella riſoluzione de' problemi è di grande neceſſità. Di tale formola intraprendo l' invenzione nel ſeguente

PROBLEMA V.

Date quante forze ſi vogliano applicate ad un corpo, ritrovare una formola generale eſprimente la forza compoſta.

SI ritrovino, come ſopra, i momenti di queſte forze relativamente a tre aſſi fra loro normali; indi queſti diverſi momenti ſi prendano tutti ſopra i ſudetti tre aſſi, riflettendo di prendere la ſomma di quei, che ſono per la medeſima direzione, e la differenza di quei, che ſono per direzione contraria.

La forza compoſta ſarà eſpreſſa da quella retta, la quale congiunge l'origine de' tre aſſi col punto, che ſerba da' medeſimi le diſtanze re-

(1) *Fig. 4.*

respettivamente eguali alle rette esprimenti i momenti sudetti ; poichè è chiaro, che questa forza debba avere relativamente ai medesimi assi i medesimi momenti.

Per trovare dunque l' estremo di questa retta è chiaro, che convenga condurre tre piani perpendicolari agli assi per quei punti, che sono gli estremi delle loro parti esprimenti i momenti, ed il punto ove questi piani scambievolmente s' intersegano sarà il punto richiesto.

Ciò premesso se le forze applicate al corpo si dicano P, Q, R, e gli angoli, che ciascuna costituisce relativamente agli assi si dicano p, p', p''; q, q', q'' &c. &c.; E poichè il momento della forza P perpendicolare al primo asse è proporzionale al seno, sarà quello, che è nella direzione del medesimo asse proporzionale al coseno, cioè $= P \operatorname{Cos}.p$; onde sarà la somma de' momenti relativamente al primo asse espressa da $P \operatorname{Cos}.p + Q \operatorname{Cos}.q + R \operatorname{Cos}.r$, &c., il momento totale relativamente al secondo asse sarà $P \operatorname{Cos}.p' + Q \operatorname{Cos}.q' + R \operatorname{Cos}.r'$ &c., e relativamente al terzo $P \operatorname{Cos}.p'' + Q \operatorname{Cos}.q'' + R \operatorname{Cos}.r''$ &c.; e perciò la forza composta sarà secondo le regole della geometria =

$$\sqrt{\left((P \operatorname{Cos}.p + Q \operatorname{Cos}.q + R \operatorname{Cos}.r \text{ ec.})^2 + (P \operatorname{Cos}.p' + Q \operatorname{Cos}.q' + R \operatorname{Cos}.r' \text{ ec.})^2 + (P \operatorname{Cos}.p'' + Q \operatorname{Cos}.q'' + R \operatorname{Cos}.r'' \text{ ec.})^2 \right)}$$

Da questa formola generale si possono risolvere tutti i casi particolari, dimostrati da diversi Autori sulla composizione delle forze.

OSSERVAZIONE.

PRima, che Mr. de la Grange avesse data l'applicazione dell' analisi, e principalmente del calcolo delle Variazioni al principio delle azioni, questa sarebbe stata la più grande universalizzazione de' principj di meccanica. Ma l'inconveniente della composizione delle forze si è, che non suggerisce un metodo generale onde trattare l'equazioni, che ne risultano. Sicchè l' applicazione di tale principio, malgrado la perspicacia degli Analisti, ha sempre ricercato particolari raziocinj geometrici, e mai ha dato risultati generalissimi.

Ognun vede però, che essendo il principio generale del momento un Teorema semplice, ed universale, applicabile tanto all' equilibrio, che al moto dei corpi, non potrà essere il principio delle azioni, che un' espressione diversa della medesima proprietà generale del rapporto delle forze.

AR-