Storia e Fondamenti della Matematica
a.a. 2019/2020

Traccia d'esame – Giugno 2020 - 2

Una riflessione sui fondamenti della matematica. Commentare criticamente il presente brano di Gottfried Wilhelm Leibniz, evidenziando in particolare, anche con riferimento a fonti di questo e di altri autori:

- i richiami alla scienza antica;
- le analogie e differenze rispetto all'impostazione euclidea;
- la visione dell'algebra e del calcolo combinatorio;
- i concetti di numero e di grandezza.

PRINCIPI METAFISICI DELLE MATEMATICHE

Il saggio intitolato Initia rerum mathematicarum metaphysica *è stato composto dal Leibniz — come risulta dalle indicazioni interne — dopo il 1714, e probabilmente egli pensava di pubblicarlo sugli « Acta Eruditorum » di Lipsia. Rimasto inedito (ed anche non perfettamente rifinito), fu pubblicato dal Gerhardt* (Mathematische Schriften, *VII, pp. 17-29*).

Insieme agli altri cinque saggi pubblicati dal Gerhardt nel volume suddetto (I-VI) documenta l'interesse metodologico che gli studi matematici del Leibniz avevano suscitato in lui per i problemi circa i fondamenti della matematica, sempre nel quadro dell'« ars inveniendi », che partendo dagli elementi più semplici della scienza e dalla loro combinazione, deve facilitare sia la via dell'apprendimento sia lo sviluppo rigoroso della scienza stessa. Il saggio in questione ha particolare importanza per la data in cui è stato composto: nonostante la molteplicità degli impegni d'ufficio degli ultimi anni di vita, il Leibniz ritornava sui temi delle sue meditazioni precedenti e li approfondiva. Gli Initia *si riallacciano infatti, generalizzandoli, agli studi di geometria non quantitativa del 1679 (quali sono documentati dalla lettera allo Huygens, dalla sua appendice, e dalla* Analysis situs). *Si tratta di indagare i fondamenti logici (similarità, congruenza, omogeneità, ecc.) di concetti e teorie matematiche; di inserire la teoria della quantità nell'àmbito della combinatoria e della caratteristica universale. I motivi ispiratori di questo saggio sono tra i più profondi ed originali del pensiero leibniziano; gli stessi che gli fanno altrove osservare: « il calcolo non è altro che un'operazione per mezzo di segni, la quale ha luogo non soltanto nelle quantità, ma in ogni ragionamento »* (Mathematische Scrhiften, *IV, p. 462*), *e « l'arte combinatoria per me è quella scienza... in cui si tratta delle forme o formule delle cose ... e che si distingue dall'algebra, che tratta delle formule applicate alla quantità, cioè dell'eguale e del diseguale »* (Philosophische Schriften, *VII, pp. 297-98*). *Gli* Initia *sono un tentativo di fondazione di quella « matematica generale », che è scienza non puramente quantitativa, e per cui « risulta la sinora ignorata o negletta subordinazione dell'algebra all'arte combinatoria, ossia dell'algebra speciosa alla speciosa generale, della scienza delle formule significanti la quantità alla dottrina delle formule o espressioni in generale dell'ordine, della similitudine, della relazione, ecc.; vale a dire, la subordinazione della scienza generale della quantità* *alla scienza generale della qualità, sicché la nostra speciosa matematica non è altro che un esempio illustre dell'arte combinatoria o speciosa generale*» (Matheseos Universalis Pars Prior, *in* Mathematische Schriften, *VII, p. 61*).

Poiché l'insigne matematico Cristiano Wolff (1), recentemente, nel suo corso latino di matematica ha fatto riferimento ad alcune mie riflessioni circa l'analisi degli assiomi e circa la natura della similitudine, spiegandole secondo il suo uso (cfr. *Acta Eruditorum* del 1714), mi è parso opportuno esporre qui alcune cose concernenti tali questioni, che ho elaborato tempo fa, affinché non vadano perdute, e da cui si può comprendere che c'è una certa analitica piú ampia della matematica, dalla quale la scienza matematica mutua ciascuno dei suoi metodi piú belli. Sarà quindi bene incominciare da punti di vista un po' piú alti:

Se si suppone che esistano parecchi stati di cose, non implicanti alcuna opposizione, si dirà che esistono *simultaneamente*. Pertanto, neghiamo che siano simultanei ciò che è accaduto lo scorso anno e ciò che è accaduto quest'anno, poiché implicano stati opposti della medesima cosa.

Se delle cose che non sono simultanee l'una implica la ragione dell'altra, quella si considererà *anteriore*, questa *posteriore*. Il mio stato anteriore implica la ragione dell'esistenza dello stato posteriore. E poiché, per la connessione di tutte le cose, il mio stato anteriore implica anche lo stato anteriore delle altre cose, ne risulta che il mio stato anteriore implica anche la ragione dello stato posteriore delle altre cose ed è anteriore anche allo stato

(1) L'opera del Wolff ricordata dal Leibniz sono gli *Elementa matheseos universae*, Halle 1713, di cui comparve una recensione anonima sugli « Acta Eruditorum » di Lipsia del 1714. Si tratta del corso latino di matematica di cui il Wolff (1679-1754), docente di matematica ad Halle dal 1706 per interessamento dello stesso Leibniz, aveva già pubblicato il manuale tedesco nel 1710: *Anfangsgründe aller mathematischen Wissenschaften*. Sulle non eccellenti doti di matematico del Wolff e sulle sue incomprensioni per gli interessi metodologici del Leibniz fornisce interessanti testimonianze l'epistolario (1704-1716 tra i due pensatori: *Briefwechsel zwischen Leibniz und Christian Wolff aus den Handschriften der Koeniglichen Bibliothek zu Hannover*, ed. cit. di C. I. Gerhardt. Per una piú ampia indicazione bibliografica cfr. F. Barone, *Logica formale e logica trascendentale*, I, 2ª ed., cit., pp. 104-20 e 137-39.

di esse. Pertanto, tutto ciò che esiste è simultaneo o anteriore o posteriore ad ogni altro esistente.

Il *Tempo* è l'ordine dell'esistere di quelle cose che non sono simultanee. Esso è pertanto l'ordine generale dei mutamenti, quando non si considerino le specie dei mutamenti.

La *Durata* è la grandezza [*magnitudo*] del tempo. Se la grandezza del tempo è diminuita continuamente e uniformemente, il tempo scompare nel momento, la cui grandezza è nulla.

Lo *Spazio* è l'ordine del coesistere, ossia l'ordine dell'esistere tra le cose che sono simultanee.

In entrambi gli ordini (del tempo e dello spazio) si valutano le cose *piú vicine* o *piú remote*, secondo che sono richieste piú o meno cose per capire l'ordine tra loro. Cosí due punti sono tanto piú vicini, quando ciò che è interposto e determinato massimamente da essi dà qualcosa di tanto piú semplice. Tale intervallo massimamente determinato è la via piú semplice dall'uno all'altro, al tempo stesso minima e massimamente uniforme, cioè la retta, che è la linea minore frapposta tra due punti piú vicini.

L'*Estensione* è la grandezza dello spazio. Si confonde di solito malamente l'estensione con ciò che è esteso e la si considera come una sostanza.

Se si diminuisce continuamente ed uniformemente la grandezza dello spazio, esso scompare nel punto, la cui grandezza è nulla.

Posizione [*Situs*] è il modo della coesistenza. Pertanto essa implica non soltanto la quantità ma anche la qualità.

Quantità o grandezza è ciò che nelle cose può essere conosciuto mediante la sola compresenza (o percezione simultanea). Cosí non possiamo conoscere che cosa sia un piede, che cosa sia un braccio se non abbiamo in atto qualcosa quale misura, che si possa quindi applicare agli altri oggetti. Non si può quindi spiegare che cosa sia il piede mediante alcuna definizione che non implichi di nuovo qualcosa di simile. Infatti, anche se diciamo che il piede è di dodici pollici, il medesimo problema sorge per il pollice, e non ne abbiamo luce maggiore; né si può dire se sia precedente per natura la nozione di piede o quella di pollice, poiché dipende dall'arbitrio quale delle due si voglia prendere per base.

Qualità, invece, è ciò che si può conoscere nelle cose quando sono osservate singolarmente, e non è necessaria la compresenza. Sono tali gli attributi che possono essere spiegati mediante una definizione o attraverso le varie modificazioni che implicano (1).

Eguali sono le cose della medesima quantità.

Simili sono le cose della medesima qualità. Quindi se due cose simili sono diverse, si possono distinguere soltanto mediante la compresenza.

Da ciò risulta, ad esempio, che due triangoli equiangoli hanno i lati proporzionali, e viceversa. Infatti, se i lati sono proporzionali,

---

(1) La qualità contrapposta alla quantità, poiché determinabile intrinsecamente, non è la qualità sensibile; essa va intesa come ciò che indica le relazioni intrinseche tra gli elementi di una figura o di una formula matematica. È utile, in proposito, tener presente un passo della *Analysis situs* — l'abbozzo del Leibniz, steso probabilmente nel 1679, contenente un tentativo di studio non-quantitativo della geometria, analogo a quello delineato nell'appendice alla lettera allo Huygens (e tradotto nella nostra raccolta), ma differenziantesi da questo perché assumente come relazione fondamentale quella di similarità — (GERHARDT, *Mathematische Schriften*, V, pp. 178-83). « La vera ragione per cui i geometri non hanno fatto abbastanza uso della teoria della similitudine è la seguente: essi non avevano una nozione generale di essa sufficientemente distinta o adatta alle ricerche matematiche, per colpa dei filosofi che son soliti accontentarsi, specie nella filosofia prima, di definizioni vaghe e pari in oscurità a ciò ch'è definito; onde non c'è da stupirsi che tale dottrina sia di solito sterile e verbosa. Così, non basta definire come simili gli oggetti la cui forma è la stessa, se non è poi dato il concetto generale di *forma*. Nell'intraprendere la spiegazione della qualità o forma, mi sono accorto che la questione sta in ciò: sono *simili* quelle cose che osservate una per una non possono essere distinte. La quantità può essere afferrata solo attraverso la compresenza delle cose o con l'intervento di qualcosa che può essere effettivamente applicato ad esse; la qualità, invece, presenta alla mente qualcosa che si può riconoscere nelle cose singolarmente prese e che si può usare nel confronto di due cose, senza prenderle assieme immediatamente o con la mediazione di un terzo *quid* quale misura. Immaginiamo che due templi o edifici siano costruiti secondo la regola che niente può essere trovato nel primo che non si trovi anche nell'altro: ed il materiale sia in entrambi lo stesso, ad esempio, marmo Pario; le proporzioni delle pareti, delle colonne, e di tutto il resto, siano le medesime in entrambi, e così pure gli angoli siano eguali, cioè con lo stesso rapporto all'angolo retto. Chi sia condotto in entrambi i templi ad occhi chiusi, e li apra quando è entrato, prima nell'uno e poi nell'altro, non riceve da essi alcun indizio per poterli discernere. E tuttavia essi possono differire per grandezza, e potranno anche essere distinti se considerati simultaneamente dallo stesso luogo, o anche (nel caso che siano distanti) se una terza cosa viene confrontata con l'uno e con l'altro, ad esempio, un'unità di misura, quale un'ulna, un piede e così via. Solo allora ci sarà una ragione per distinguere l'appresa ineguaglianza. Analogamente avviene se lo stesso corpo dello spettatore o un suo membro, che naturalmente si muova con lui di luogo in luogo e serva come misura, è confrontato con questi templi: anche in questo caso appariranno le diverse grandezze e il modo per distinguerle. Ma se si considera lo spettatore soltanto come mente vedente, quasi costituita in un punto, non portante con sé alcuna grandezza, o reale o nell'immaginazione, e guardante soltanto quegli aspetti delle cose che sono afferrabili con l'intelletto, quali numeri, proporzioni, angoli, non ci sarà alcuna distinzione. Si dirà pertanto che tali templi sono simili, poiché non si potranno distinguere singolarmente o presi per sé, bensì soltanto mediante l'osservazione simultanea reciproca o con una terza cosa » (*op. cit.*, pp. 179-80).

i triangoli sono simili, essendo determinati in modo simile. Inoltre, la somma degli angoli, in ogni triangolo, è la medesima, essendo eguale a due retti; è dunque necessario che il rapporto degli angoli corrispondenti con la somma sia eguale tanto nell'uno quanto nell'altro; altrimenti, anche un solo triangolo potrebbe distinguersi per ciò stesso dall'altro, ossia di per sé o considerato singolarmente. Si dimostra cosí facilmente ciò che in altro modo si dimostrerebbe attraverso molti giri (1).

Omogenee sono le cose per cui si possono dare cose eguali tra loro simili. Siano A e B e si possa prendere L eguale ad A ed M eguale a B, tali che L ed M siano simili: allora A e B si chiameranno omogenei.

Sono, quindi, anche solito dire che sono omogenee quelle cose che si possono rendere simili mediante trasformazioni, come la linea curva alla retta. Cioè, se si trasforma A nel suo eguale L, può diventare simile a B o ad M, in cui si supponga trasformato B.

Diciamo che un ente è in [*inesse*] o è ingrediente di qualcosa, quando, posto questo qualcosa, si comprende immediatamente, cioè senza bisogno di alcuna inferenza, che è posto l'ente stesso. Cosí, quando poniamo una linea finita, poniamo i suoi termini come sue parti.

Ciò che è [*inest*] nell'omogeneo si chiama parte, e ciò in cui è si chiama tutto; cioè, la parte è ingrediente dell'omogeneo (2).

Limite [*Terminus*] comune è ciò che è in due cose non aventi parte comune. E quando tali cose siano intese come parti di un medesimo tutto, quel limite comune si dice sezione del tutto.

Di qui risulta che il limite non è omogeneo con ciò che è limitato, né la sezione omogenea con ciò ch'è secato.

Tempo e momento, spazio e punto, limite e limitato benché non siano omogenei sono tuttavia *omogoni*, in quanto con un continuo mutamento possono sparire l'uno nell'altro.

Intendiamo essere omogono un luogo che si dica essere in un altro luogo, poiché se ne fosse parte o eguale ad una parte, non sarebbe soltanto omogono ma anche omogeneo. Benché un angolo sia ad un punto, non è tuttavia in un punto, altrimenti si intenderebbe esserci grandezza in un punto.

---

(1) Per una calcolo delle similarità cfr. la già cit. *Analysis situs*.

(2) Sulla distinzione leibniziana tra la coppia tutto-parte e quella contenente-contenuto, cfr. L. Couturat, *La logique de Leibniz*, cit., pp. 305-6, e F. Barone, *Logica formale e logica trascendentale*, I, cit., pp. 286-91.

Se la parte di una cosa è eguale all'intero di un'altra, questa si chiama minore, quella maggiore.

Pertanto il tutto è maggiore della parte. Sia il tutto *A*, la parte *B*; dico che *A* è maggiore di *B*, poiché una parte dello stesso *A* (cioè *B*) è eguale a tutto *B*. Si può anche esporre l'argomento con un sillogismo, la cui proposizione maggiore è una definizione e la minore è una proposizione identica:

> Tutto ciò che è eguale ad una parte di *A* è minore di *A*, per definizione;
>
> *B* è eguale ad una parte di *A*, cioè a sé, per ipotesi;
> quindi, *B* è minore di *A*.

Donde vediamo che le dimostrazioni si risolvono in ultimo in due indimostrabili: le definizioni o idee, e le proposizioni primitive, ossia identiche, quali sono « *B* è *B* », « una qualsiasi cosa è eguale a sé stessa », ed infinite altre di questo tipo.

Il moto è mutamento di posizione [*mutatio situs*].

Si muove ciò in cui c'è mutamento di posizione e, al tempo stesso, una ragione del mutamento.

Il mobile è omogono con l'esteso, poiché si intende anche un punto come mobile.

Traiettoria è il continuo e successivo luogo della cosa mobile.

Traccia è il luogo della cosa mobile ch'essa occupa in un dato momento. Quindi traccia di un limite è la sezione della traiettoria che il limite descrive, quando, s'intende, il mobile non procede attraverso le sue tracce.

Si dice che un mobile procede attraverso le sue tracce, quando ciascuno dei suoi punti, eccetto il limite, succede continuamente nel luogo di un altro punto dello stesso mobile.

Ché, se si suppone che il mobile non si muova in tal modo, allora una linea è la traiettoria di un punto.

Superficie è la traiettoria di una linea.

Uno spazio pieno [*Amplum vel Spatium*], o, come si dice comunemente, un solido, è la traiettoria di una superficie.

Le grandezze delle traiettorie con cui il punto descrive la linea, la linea la superficie, la superficie il solido, si chiamano lunghezza [*longitudo*], larghezza [*latitudo*], profondità [*profunditas*]. Esse si chiamano dimensioni, e si mostra in geometria che se ne danno soltanto tre.

Ha larghezza ciò di cui si dà una sezione estesa, ossia che è limitato dall'esteso.

Ha profondità ciò che l'esteso non limita, cioè che non può essere una sezione dell'esteso; ossia, in ciò che è profondo vi è qualcosa di piú di quanto possa essere un limite.

La linea è l'ultimo esteso limitante.

Il solido è l'ultimo esteso limitato.

La simiglianza o la dissimiglianza nel solido o nello spazio sono conosciute in base ai limiti; pertanto il solido, essendo qualcosa di piú di quanto possa essere il limite, nell'interno è dappertutto simile. E i solidi le cui estremità d'ogni specie coincidono, sono cioè congruenti ed assimilate, sono essi stessi coincidenti, congruenti e simili. Lo stesso vale nel piano, che è all'interno superficie uniforme o simile a sé stessa, e nella retta che è linea all'interno simile a sé stessa.

Il limite completo [*omnimoda extremitas*] nelle cose estese aventi larghezza si può chiamare perimetro [*Ambitus*]. Cosí, il perimetro del cerchio è la circonferenza [*peripheria*], il perimetro della sfera è la superficie sferica.

Il punto (dello spazio) è il luogo piú semplice, cioè il luogo di nessun altro luogo.

Lo spazio assoluto è il luogo piú pieno, cioè il luogo di tutti i luoghi.

Da un solo punto non risulta [*prosultat*] nulla.

Da due punti risulta qualcosa di nuovo, cioè qualsiasi punto individuato dalla sua posizione rispetto ad essi, ed il luogo di tutti questi punti: cioè la retta che passa per i due punti dati.

Da tre punti risulta un piano, cioè il luogo di tutti i punti individuati dalla loro posizione rispetto ai tre punti non cadenti in linea retta.

Da quattro punti non cadenti nel medesimo piano risulta lo spazio assoluto. Poiché qualsiasi punto è individuato dalla sua posizione rispetto ai quattro punti non cadenti sul medesimo piano.

Mi servo del termine «risultare» [*prosultare*] per indicare un'idea nuova, quando da alcune cose date viene determinata qualche altra cosa in maniera univoca per il fatto stesso della sua relazione ad esse. E in questo caso per relazione si intende la posizione.

Il tempo può essere continuato all'infinito. Essendo infatti l'intero tempo simile ad una parte, avrà con un altro tempo lo stesso rapporto che la parte ha con lui stesso; e cosí s'intende come possa continuare in un altro tempo maggiore.

Analogamente, anche **lo spazio solido o ampiezza può essere continuato all'infinito**, in quanto una sua parte può essere considerata simile al tutto. E quindi anche il piano e la retta si possono continuare all'infinito. Nello stesso modo si mostra che lo spazio, come la retta, come il tempo e, in generale, come ogni continuo, possono essere divisi all'infinito. Infatti, sia nella retta sia nel tempo, la parte è simile al tutto, e può pertanto essere divisa allo stesso modo dell'intero; e benché vi siano cose estese in cui la parte non è simile al tutto, esse si possono tuttavia trasformare in cose in cui ciò valga e dividerle allo stesso modo nel quale sono divise quelle in cui sono trasformate.

Consegue anche da ciò che per ogni moto se ne può assumere uno piú rapido ed uno piú lento in un rapporto dato: movendo, infatti, un raggio rigido circa un centro, i moti dei punti stanno tra loro come le loro distanze dal centro; e pertanto le velocità possono variare come le rette.

La **valutazione** [*aestimatio*] delle grandezze è duplice: imperfetta e perfetta; imperfetta, quando diciamo che qualcosa è maggiore o minore di un'altra, benché non siano omogenee e non abbiano tra loro proporzione; come se qualcuno dicesse che la linea è maggiore del punto o la superficie della linea. Ed a questo modo Euclide asserí che l'angolo di contatto è minore di qualsiasi angolo rettilineo (¹), benché in realtà non ci sia alcun confronto tra queste due entità totalmente diverse, in quanto non sono omogenee e non si può passare dall'una all'altra con mutamento continuo. Nelle valutazioni perfette tra grandezze omogenee vale la regola che, passando continuamente da un estremo all'altro, si passa per tutti gli stati intermedi; ma tale regola non vale nelle valutazioni imperfette, poiché ciò che qui si chiama medio è eterogeneo. Pertanto, passando con continuità da un angolo acuto dato all'angolo retto non si passa attraverso l'angolo formato dal diametro o dal raggio con la circonferenza, benché tale angolo venga detto minore dell'angolo retto e maggiore di qualsiasi angolo acuto. Qui si prende impropriamente il termine « maggiore », per il fatto che una cosa cade entro un'altra.

Ci sono parecchie relazioni secondo la quantità; cosí due seg-

(¹) Cfr. Euclide, *Elementi*, III, prop. 16.

menti di retta possono avere una relazione tale che la loro somma sia eguale ad un segmento costante di retta. E ci possono essere infinite coppie di segmenti di retta aventi tra loro tale relazione. Ossia, siano x e y, tali che $x+y=a$; se, ad esempio, a è eguale a 10, x ed y possono essere rispettivamente 1 e 9, 2 e 8, 3 e 7, 4 e 6, 5 e 5, 6 e 4, 7 e 3, 8 e 2, 9 e 1. Ma si possono prendere anche infinite frazioni entro il 10 che soddisfino la condizione data. Analogamente, ci può essere una relazione tra due segmenti di retta, x e y, tale che la somma dei loro quadrati sia eguale al quadrato dato di un segmento di retta a, cosicché $xx+yy=aa$: ed anche di queste coppie ce ne possono essere infinite. Questa è la relazione, nel cerchio, tra il seno di un angolo ed il seno del suo complementare, poiché, posto che uno sia x e l'altro y, il raggio è a. E si possono immaginare infinite relazioni simili, tante quante sono le specie di linee che si possono descrivere nel piano. Ad esempio, se x sono le ascisse su una retta direttrice, y saranno le ordinate, tra loro parallele applicate alle ascisse, i cui termini formano una linea.

Tuttavia, la piú semplice di tutte le relazioni è quella che vien chiamata r a p p o r t o [*Ratio*] o p r o p o r z i o n e ; essa è la relazione di due quantità omogenee che sorge da esse sole, senza assumerne una terza omogenea. Ad esempio, se y sta ad x come un numero all'unità, ossia $y=nx$, prendendo x come ascissa ed y come ordinata, il luogo (cioè la linea delimitata dalle ordinate) sarà una retta. Da ciò risulta anche che se ci fosse per il luogo un'equazione di qualsiasi grado, come $lx^3+my^3+nx^2y+pxy^2=0$, ove l, m, n e p sono numeri, il luogo per cui l'equazione varrebbe sarebbe una retta ed il rapporto dato lo stesso degli x e degli y.

Siano dati due segmenti di retta, e li si raffronti comunque. Ad esempio, si sottragga il minore dal maggiore quante volte si può, e si sottragga ancora il resto dal minore, e cosí via il nuovo resto dal primo già sottratto quante volte si può, fino a che risulti per resto zero, essendovi una misura comune per l'ultimo sottraendo, se le quantità sono commensurabili, oppure si abbia la legge di progressione all'infinito, se le due quantità sono incommensurabili. E la serie dei numeri quozienti sarà qual è la proporzione. Cioè, se a sta a b come

$$l+\cfrac{1}{m+\cfrac{1}{n+\cfrac{1}{p}+\text{ecc.},}}$$

sta all'unità, l, m, n, p, ecc., sarà la serie dei numeri quozienti. Ad esempio, se a è 17 e b è 5, la serie consterà soltanto di l, m, n, i cui valori numerici saranno 3, 2, 2. Se a e b sono parti di retta divisa nel rapporto di estremo e medio, la parte maggiore a starà alla minore b come

$$1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \text{ecc.}}}}$$

sta all'unità; i quozienti saranno unità e la loro serie andrà all'infinito. Cosí a e b saranno segmenti qualsiansi che staranno tra loro come $\frac{l}{1} + \frac{m}{2} + \frac{n}{4} + \frac{p}{8} + \frac{q}{16} + \text{ecc.}$ sta ad 1, posto che l, m, n, p, q siano eguali a 0 od 1; e la serie o finisce o è periodica, quando i numeri sono commensurabili.

Da ciò consegue che le linee simili sono nel rapporto di rette omologhe, che le superfici simili stanno tra loro come i quadrati di rette omologhe, ed i solidi simili come i loro cubi. Siano A ed L due figure estese simili, e B ed M due omologhi omogenei. Poiché A con B (ossia A; B) è simile ad L con M (ossia L; M), il rapporto di A a B sarà lo stesso di quello di L ad M; inoltre, A; L può essere distinto da B; M in altro modo che mediante la compresenza, poiché compariranno numeri diversi esprimenti il rapporto. Quindi permutando si avrà che A sta ad L come B ad M, come era posto. Cosí si mostra che i cerchi stanno come i quadrati dei diametri, le sfere come i cubi dei diametri. I cerchi (o le sfere) saranno A ed L, i quadrati omologhi (o i cubi omologhi) B ed M.

È cosí manifesto che il numero in genere, intero, fratto, razionale, irrazionale, ordinale, trascendente può essere definito con nozione generale come ciò che è omogeneo all'unità, cioè che sta all'unità come un segmento ad un altro segmento. È anche manifesto che, se si considera come rapporto di a con b il numero che sta all'unità come il segmento di retta a al segmento di retta b, il rapporto stesso sarà omogeneo all'unità; e che inoltre l'unità rappresenta il rapporto dell'eguaglianza.

Va anche notato che l'intera dottrina algebrica è un'applicazione alla quantità dell'arte combinatoria, ossia della dottrina astratta delle forme (*doctrinae de Formis abstractae animo*), che è la caratteristica universale ed appartiene alla metafisica. Cosí, il prodotto della moltiplicazione di $a+b+c+$ecc., per $l+m+n+$ecc. non è altro che la somma di tutte le combinazioni binarie (*biniones*) che si ottengono dalle lettere delle due serie; e il prodotto delle tre serie $a+b+c+$ecc., $l+m+n+$ecc., $s+t+v+$ecc., sarà la somma di tutte le combinazioni ternarie (*terniones*) ottenute dalle lettere di tali serie. E da altre operazioni risulteranno altre forme.