Storia e Fondamenti della Matematica
a.a. 2023/2024

Traccia d'esame – Luglio 2024 – 1

A partire dalle pagine qui allegate, tratte dal saggio *Le sorgenti speculative dell'irrazionale matematico nei dialoghi di Platone* (2018) di Imre Toth (traduzione dell'originale francese del 2011), approfondire l'argomento alla luce delle fonti citate, in una prospettiva storica, con particolare riguardo ai seguenti aspetti:

- l'importanza dell'indagine linguistica;
- l'irrazionalità e l'incommensurabilità;
- la distinzione fra numeri e grandezze, tra aritmetica e geometria ed altre coppie di opposti;
- il ruolo della misura nella nascita e nell'evoluzione del pensiero scientifico.

Imre Toth

Le sorgenti speculative dell'irrazionale matematico nei dialoghi di Platone

Platone:

Sapere il non essere, dire il non essere, assegnare essere al non essere.
La diade infinita e l'uno, fondamenti logici e ontologici del numero irrazionale.

Per Sigmund Probst, compagno fedele,
amico sicuro, instancabile, inesauribile.

1. *Le prime occorrenze di* irrazionale *in quanto termine delle scienze matematiche*

La più antica occorrenza del termine *irrazionale*, nel suo significato matematico, si trova in Liside, uno degli antichi pitagorici, che, secondo la testimonianza di Athenagora, conferisce alla divinità l'attributo di *numero ineffabile* (id est irrazionale): ἀριθμὸν ἄρρητον ὁρίζεται τὸν θεόν[1].

La più antica menzione del termine ἄλογος si trova nel titolo di un'opera perduta di Democrito: ΠΕΡΙ ΑΛΟΓΩΝ ΓΡΑΜΜΩΝ ΚΑΙ ΝΑΣΤΩΝ[2].

1.1. *Il termine* ἄλογος -τὸ ἄλογον- *nei dialoghi platonici e la sua ambiguità*

La parola "irrazionale", ἄλογον, è ambigua. Da un lato dispone di una connotazione ordinaria: *follia, sragione, demenza, incoerenza, atto estraneo alla ragione*. Per esempio Platone in *Phileb.* 28d: l'universo non è diretto dalla *follia* (ἄλογον), ma dalla saggezza (φρόνησις).

Questa anfibolia fu sviluppata da Platone in un passo estremamente oscuro e difficile della *Repubblica* (*Rsp.* 534d: "Ma questi tuoi fanciulli, che allevi ed educhi nel pensiero e nel discorso, se ti trovassi a crescerli con la tua opera, non credo che, una volta divenuti reggitori tra i più importanti delle maggiori cose della città, permetteresti che fossero irrazionali come linee (ἀλλὰ μὴν τούς γε σαυτοῦ παῖδας, οὕς τῷ λόγῳ τρέφεις τε καὶ παιδεύεις, εἴ ποτε ἔργῳ τρέφοις, οὐκ ἂν

[1] Diels-Kranz, *Die Fragmente der Vorsokratiker* (d'ora innanzi DK): 46. ARCHIPPOS. LYSIS. OPSIMOS - 4. [*I Presocratici*, a cura di G. Reale, Bompiani, Milano 2006, p. 860.]
[2] DK 68 DEMOKRITOS B ΜΑΘΕΜΑΤΙΚΑ 11p. [*I Presocratici*, cit., p. 1214.]

ἐάσαις, ὡς ἐγῷμαι, ἀλόγους ὄντας ὥσπερ γραμμάς, ἄρχοντας ἐν τῇ πόλει κυρίους τῶν μεγίστων εἶναι)".

ἀλόγους ὄντας ὥσπερ γραμμάς, di fatto un gioco di parole la cui fragranza retorica lascia tuttavia intravedere una certa aggressività intellettuale che nasce da una evidente intenzione provocatoria geometrico-politica – gioco di parole costruito secondo il migliore stile surrealista di Boris Vian.

Come ha mostrato Eva Sachs[3], il punto di riferimento del vocabolo linee, γραμμάς, in *Rsp.* 534d, è indubbiamente la diagonale – del quadrato o, anche, del pentagono regolare – la cui *misura* – id est la *lunghezza* – è irrazionale.

Questa lunghezza è espressa, nel caso del quadrato, dal numero irrazionale $\sqrt{2}$, e nel caso di un pentagono il cui lato è uguale a due unità, dall'irrazionale algebrico $1 + \sqrt{5}$[4]. Inserire in un discorso politico consacrato alla migliore forma di governo e all'elezione del capo dello stato un argomento che gioca sull'anfibolia del vocabolo ἄλογος – ambiguità di nuova acquisizione imposta dai più stupefacenti e difficili risultati della più recente ricerca matematica, inaccessibile ai non iniziati – oggi sarebbe considerato certamente una manifestazione intollerabile di perfido snobismo elitarista; ma, come ha rilevato Eva Sachs, nel caso della *Repubblica* si dovrà considerare questo argomento una prova dell'alto livello culturale dell'uditorio. D'altro lato, come lo stesso Platone fa notare nel suo *Cratilo* "persino gli dei amano lo scherzo"[5].

1.2. *Democrito: le linee irrazionali rendono compatta la retta razionale disseminata di lacune*

Si deve notare, a proposito, che l'espressione *linea irrazionale* si trova anche – prima (un po' prima) di Platone, ma quasi contemporaneamente a lui – nel titolo dell'opera di Democrito: ΠΕΡΙ ΑΛΟΓΩΝ ΓΡΑΜΜΩΝ ΚΑΙ ΝΑΣΤΩΝ (DK 68B ΜΑΘΕΜΑΤΙΚΑ 11p).

[3] *De Theaeteto Atheniensi Mathematico*, Dissertatio, Berlin 1914.

[4] Se è la diagonale ad avere lunghezza uguale a 2, allora è la lunghezza del lato che sarà espressa dal numero irrazionale $\sqrt{5} - 1$; rapporto del *mezzo* e dell'*estremo*, ἄκρος καὶ μέσος λόγος; *Elem.* XIII, 1; attestato in *Phaedr.* 264c; è la *proportio divina* di Luca Pacioli (*sezione aurea* nei termini attuali).

[5] Φιλοπαίσμονες γὰρ καὶ οἱ θεοί: *Crat.* 406c.

– L'osservazione può benissimo essere interpretata come una giustificazione – articolata, per altro, essa stessa, nella forma di un gioco di parole con il termine φιλοπαίσμονες, che ha in sé una anfibolia semantica molto sofisticata.

Ispirandosi alla filosofia atomistica di Democrito – che oppone il *vuoto*, κενός, al *pieno*, ναστός, rappresentato dagli atomi –, si è proposto di tradurre questo titolo, dalle risonanze misteriose, con l'espressione: *Sulle linee irrazionali e i solidi* o *gli atomi*, e di vedervi l'indizio di una *matematica atomistica infinitesimale*, attribuita a Democrito[6]. Tutto ciò non esiste né è mai esistito. Democrito ci ha lasciato una fondamentale opera matematica, attestata dalle testimonianze di Plutarco[7], comprendente l'inizio di un procedimento infinitesimale – appena un inizio, ma eccellente – per la cubatura del cono, ma nella sua opera non si trova traccia di alcuna "matematica atomistica infinitesimale" – che è, d'altronde, una assurdità matematica[8]*; e la traduzione convenzionale, mettendo l'irrazionale in relazione con gli atomi, è un puro non senso.

La traduzione esatta, parola per parola, del titolo è, invece, la seguente: *Sulle linee irrazionali e la compattezza.* Il corrispondente esatto del termine ναστός è, secondo il vocabolario, la parola "compatto", che

[6] Salomon Luria, "Die Infinitesimaltheorie der antiken Atomisten", in: *Quellen u. Studien Gesch. d. Math.* 1932, pp. 106-185; Heinrich Vogt, "Die Geschichte des Irrationalen nach Plato u. anderen Quellen des 4. Jhdts", in *Bibliotheca mathematica*, 1909-1910, pp. 97-155.

[7] Rheinard Seide, *Die mathematischen Stellen bei Plutarch*, 1981, Regensburg Univ., Philos. Fak., Diss.

[8] * (N. d. T.) La difficoltà di interpretazione di questo titolo – di questo frammento – di Democrito, è uno di quei problemi che non possono essere risolti dalla sola filologia e che tanto hanno appassionato e messo alla prova I. Toth. La traduzione cui egli si riferisce qui è quella di H. Vogt che riporta in nota DK: "Über verhältnislose (nicht irrationelle) Linie und Atome" erklaert H. Vogt – Sulle linee prive di relazione (non irrazionali) e gli atomi, chiarisce H. Vogt."

Questo "chiarimento" non ha soddisfatto V. E. Alfieri che, nel suo libro su *Gli atomisti: frammenti e testimonianze*, traduzione e note, Laterza, Bari 1936, a pagina 200 traduce:

SULLE LINEE E I SOLIDI [?] IRRAZIONALI

Detto che il punto interrogativo in parentesi quadra si riferisce al dubbio sul significato della parola ναστῶν, si deve aggiungere che il riferimento dell'aggettivo irrazionali ai solidi sarà forse una sottigliezza filologica, ma non ha una seria spiegazione matematica. C'è comunque qui l'idea che la spiegazione deve trovarsi nella matematica e non nella fisica atomistica.

L'Alfieri cita la traduzione di Vogt e, insieme ad essa, la proposta di Hultsch, che precede la traduzione di Vogt e risale al 1881, di mettere al posto di ναστῶν, κλαστῶν [solidi].

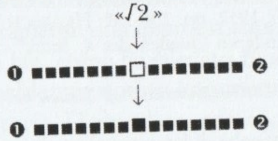
Quando lessi per la prima volta la traduzione di Toth, gli telefonai e poi gli scrissi per fargli notare che egli traduceva un plurale, ναστῶν, con un singolare, "compattezza". Hai ragione, mi rispose ironicamente, ma quello è un plurale maiestatis.

In ogni caso non si può non sottolineare l'acutezza di questa traduzione e interpretazione.

indica uno stato di aggregazione "senza lacune", (tedesco: lückenlos). È esattamente il vocabolo con il quale la terminologia moderna della matematica ha rimpiazzato il termine classico, di origine aristotelica, di *continuo*, συνεχής, che indica una continuità più debole, una *connessione*. Poiché, infatti, l'esistenza di un *numero razionale*, o di un λόγος, del quale la composizione moltiplicativa con se stesso sia uguale a 2 è impossibile, là, nell'esatto luogo dove – sulla retta numerica composta dall'universo lineare dei numeri razionali, dei λόγοι, – dovrebbe trovarsi un tale λόγος, si trova un punto, στιγμή, risultato di un atto di trafittura operata sulla retta, dunque un foro, una lacuna riempita di nulla.

Il numero irrazionale √2 riempie esattamente questa lacuna. Riempie solo questo foro esistenziale dell'universo della ragione, del λόγος, con l'irrazionale, con questo oggetto aritmetico – uno ἄλογον–; l'universo lineare geometrico e aritmetico cessa di essere *lacunoso* e, grazie a questo ἄλογον, diviene compatto, ναστός.

ΠΕΡΙ ΑΛΟΓΩΝ ΓΡΑΜΜΩΝ ΚΑΙ ΝΑΣΤΩΝ



Compattamento dell'intervallo lineare dei numeri [1 … 2]
mediante l'aggiunta del numero irrazionale √2
all'universo dei numeri razionali.

La retta numerica sostegno dell'universo lineare dei numeri razionali, è un universo *ovunque denso*, ma disseminato di lacune. Esso diviene, secondo la terminologia attuale della teoria degli insiemi infiniti di Georg Cantor, "compatto" dopo aver riempito i suoi luoghi vuoti d'essere, i suoi buchi, dunque, con i numeri irrazionali, le lacune dei quali rappresentano i luoghi vuoti d'essere. Ciò richiede, evidentemente, la preliminare assegnazione del predicato ontico "essere" ai numeri irrazionali. Si tratta del ruolo decisivo dei numeri irrazionali, che è quello di rendere *compatto* l'universo lineare dei punti. Queste sono, infatti, le grandi conquiste del pensiero matematico moderno, che bisognava attendere per disporre degli strumenti concettuali necessari alla decifrazione e alla comprensione dei testi di Democrito.

2. *Aristotele: l'incommensurabile, ἀσύμμετρον, e l'irrazionale, ἄλογον*

Pur essendogli familiare il vocabolo ἄλογον come *termine tecnico* della geometria (ἡ δὲ γεωμετρία τί τὸ ἄλογον: *Anal. Post.* 76b9), Aristotele ricorre sistematicamente al vocabolo ἀσύμμετρον, termine esente da ogni equivoco semantico, legato a una realtà geometrica palpabile e direttamente accessibile alla intuizione comune: l'impossibilità di *misurare* – per mezzo del lato preso come unità di misura – la lunghezza della diagonale con un numero finito di passi; il che implica l'impossibilità di esprimere la presunta lunghezza della diagonale con un numero, ἀριθμός. Si deve segnalare, a questo proposito, un passo oscuro della *Metafisica*, dove Aristotele nega la legittimità di parlare di un *numero incommensurabile*: κατὰ μὴ συμμέτρου δὲ ἀριθμὸς οὐ λέγεται (*Met.* 1021a5-6); dunque anche la legittimità di assegnare l'epiteto di *irrazionale* all'entità aritmetica che è il numero.

Il procedimento di misurazione consisteva nella *reciproca* e reiterata estrazione (ἀνταναίρεσις in Arist. *Top.* 158b33; ἀνθυφαίρεσις in Eucl. *Elem.* VII, 1; X, 2) di due segmenti di retta, l'uno di grandezza inferiore all'altro. Se, dopo un numero finito di passi, si giunge a un termine finale [del processo], allora questo resto sarà identico alla misura comune (κοινὸν μέτρον: *Elem.* X, def. 1; X, 3) dei due segmenti inizialmente dati. Nell'onomasiologia di tradizione pitagorica, i termini *misura*, μέτρον, e *commensurabile*, σύμμετρον, sono, di conseguenza, sinonimi di numero, ἀριθμός. La finitezza dell'*antanairesi* è il sinonimo della *commensurabilità* di due segmenti di retta dati[9]. La misurazione eseguita con la misura comune giunge sempre a un numero intero, ἀριθμός: il nome proprio di una lunghezza è per forza un numero naturale. Al posto dell'attuale termine *divisibilità* e operazione di *divisione*, la terminologia pitagorica (conservata nei libri aritmetici di Euclide) ricorre invariabilmente al

[9] Wilbur Knorr, *The Evolution of Euclidean Elements. A Study of the Theory of Incommensurable Magnitudes and its Significance for early Greek Geometry*, Reidel, Dordrecht-Boston 1975; Maurice Caveing, *La constitution du type mathématique de l'idealité dans la pensée grecque*, Thèse, Paris 1977, vol. III: *La question de l'irrationalité*, Lille: Atelier Nationale de reproduction des thèses, 1987; Id., *L'irrationalité dans la mathématique grecque jusqu'à Euclide*, Presses Universitaires du Septentrion, Paris 1998; Jean-Louis Gardies, *L'organisation des mathématiques grecques de Thalès à Archimède*, Vrin, Paris 1997; Charles Mugler, *Platon et la recherche mathématique de son époque*, Heitz, Strasbourg-Zürich 1948; Paul-Henri Michel, *De Pythagore à Euclide. Contribution à l'histoire des mathématiques préeuclidiennes*, Les Belles Lettres, Paris 1950; Paul Tannery, *Pour l'histoire de la science hellène. De Thalès à Empédocle*, Alcan, Paris 1887.

vocabolo e all'operazione di *misurazione* (καταμετρῆται: *Elem.* VII, def. 3-5). Nel teorema *Elem.* X, 2, l'*incommensurabilità*, ἀσύμμετρον, dei due segmenti è definita da una estrazione reciproca che si prolunga fino all'*eternità* (ἀνθυφαιρουμένον ἀεί) *senza essere mai arrivata a una misura comune* (μηδέποτε καταμετρῇ).

La relazione binaria d'*incommensurabilità* che sussiste tra due segmenti di retta dati, è dunque conseguenza necessaria dell'infinità del procedimento di misurazione: la *non finitezza dell'antanairesi* equivale all'incommensurabilità. Come ricordava Proclo[10], *con l'irrazionale l'infinito è ineludibile.*

Il termine *incommensurabile* riguarda una coppia di entità geometriche, come il lato e la diagonale[11] del quadrato e del pentagono regolare. Come la *commensurabilità*, l'*incommensurabilità* è una proprietà fondamentale di una coppia di segmenti di retta dati; concreta e ben definita, anche se la sua definizione è articolata per mezzo di una espressione negativa: *non disporre di una misura comune.* Il predicato di *incommensurabile* è assegnato al soggetto *coppia di due segmenti di retta*, in quanto proprietà attuale di esso – predicato altrettanto concreto e positivo di quello di *commensurabile.*

D'altro lato, il sostantivo ἄλογον, come è concepito e utilizzato da Platone, designa una entità aritmetica autonoma, indipendente da ogni rappresentazione geometrica, una entità del tutto equivalente all'attuale concetto di *numero irrazionale* (v. *infra*). All'opposto di Platone, Aristotele evita di designare la *presunta lunghezza* della diagonale del quadrato con il termine ἄλογος. Secondo la testimonianza sopra citata degli *Analitici posteriori* (76b9), Aristotele conosceva molto bene l'interpretazione matematica del termine, ma la fa passare deliberatamente sotto silenzio. Silenzio eloquente, perché costituisce un indizio, se ve n'è ancora bisogno, della ripugnanza che egli aveva nei confronti di ogni ambiguità, di tutto ciò che ha a che fare con l'irrazionale, con l'infinito – ma segno anche, pure se in questo caso tacito, della sua inflessibile

[10] *Procli Diadochi in primum Euclidis Elementorum librum commentarii*, ex recognitione Godofredi Friedlein, Lipsiae MDCCCLXXIII, pp. 6, 60. [Trad. it. Proclo, *Commento al I Libro degli Elementi di Euclide*, Introduzione, traduzione e note a cura di Maria Timpanaro Cardini, Giardini, Pisa 1978, p. 29: *Che se da un lato non ci fosse l'Illimitato, le grandezze sarebbero tutte commensurabili e nessuna sarebbe inesprimibile o irrazionale* (ἄρρητον, ἄλογον); p. 68: *... perché dove c'è divisione all'infinito, lì c'è anche l'irrazionale.*]

[11] ἀσύμμετρος ἡ διάμετρος: Arist. *Anal. Pr.* 41a 26-29, 46b 29-34, 65b 9-17; *Phys.* 222a5; *De coelo* 281a7; *EN* 1112a 22-23) e passim; vocabolo di grande frequenza nel *corpus aristotelicum*.

ostilità verso la concezione del numero irrazionale che era quella di Platone e che lo Stagirita ha soprattutto cercato di demolire nei due ultimi libri della sua *Metafisica*.

3. *Lunghezze irrazionali nel* Teeteto *di Platone*

Ma l'incommensurabilità mette in dubbio – rende problematica – la *legittimità* stessa dell'assegnazione della proprietà metrica di "lunghezza" (μῆκος) a un segmento di retta incommensurabile come la diagonale del quadrato o del pentagono regolare. *Lunghezza incommensurabile*: questo dovrà imporre l'accettazione implicita di una *misura non misurabile*, il che potrà essere percepito come una situazione molto scomoda.

Una interrogazione sulla legittimità di assegnare una lunghezza, una misura quindi, a un segmento di retta non misurabile, è infatti concretamente percepibile nella terminologia del celebre passo geometrico (147d-148b) del *Teeteto* di Platone.

Nel suo colloquio con Teodoro[12*], Teeteto propone di assegnare il termine lunghezza, μῆκος, unicamente ai segmenti di retta *commensurabili*, mentre per i segmenti di retta *incommensurabili*, propone il termine δύναμις, *potenza*. Ormai questo neologismo designerà la misura di un segmento di retta *incommensurabile*, non misurabile, quindi, con l'unità di misura della lunghezza. Questo significa che, a dispetto della sua incommensurabilità, la proprietà di possedere una misura, una *lunghezza sui generis*, è stata, ciononostante, assegnata a questa grandezza, *de facto* non misurabile, alla quale nessuna lunghezza propria, μῆκος, può essere destinata.

Teeteto ha giustificato nel modo che segue la sua insolita onomaturgia: nonostante che dispongano di una *grandezza* ben definita, i lati dei quadrati di area uguale a 3, 5, ..., 17, ..., e così via, non sono commensurabili con l'unità di misura *secondo la lunghezza* (μήκει οὐ σύμμετροι τῇ ποδιαίᾳ: 147d5-6); questo costringe ad ammettere tacitamente l'impossibilità d'assegnare il predicato μῆκος, "lunghezza", a questi segmenti non misurabili. Rinunciando al termine μῆκος, Teeteto ammetteva implicitamente che queste *linee ben definite non dispongono affatto di una lunghezza.*

[12] *(N.d.T.) L'interlocutore di questo passo è Socrate, ma Teeteto narra di una precedente lezione di Teodoro.

È manifestamente una constatazione che suona come paradossale e – una volta ammessa esplicitamente – potrà comportare delle conseguenze molto gravi: bisognerà, in questo caso, ammettere che non tutte le grandezze (μεγέθη) lineari dispongono di una lunghezza. L'insieme di *tutte le grandezze lineari* dovrebbe, di conseguenza, essere diviso in due sottoinsiemi complementari; l'uno contenente tutte le grandezze lineari aventi una lunghezza, l'altro contenente il suo complementare, la totalità delle grandezze lineari che non dispongono di lunghezza. Si deve tuttavia mettere in evidenza che tale situazione non ha in sé niente di contrario alla logica e che, invece, potrà venire concepita come una conseguenza necessaria della fedeltà ai princìpi del ragionamento inferenziale. Ricordo, a questo proposito, che – con l'eccezione dei libri X e XIII – il concetto di *lunghezza* e, in generale, di *misura*, non gioca alcun ruolo negli *Elementi*; le grandezze che vi giocano un ruolo non sono mai definite per mezzo della loro lunghezza, ma per mezzo delle loro proprietà geometriche intrinseche.

Per quanto ne so, il numero di occorrenze del termine μετρητική[13]*, tanto nella letteratura matematica antica che nelle testimonianze ulteriori riguardanti la geometria greca, è uguale a zero. Appartiene all'invenzione di Platone e non è mai stato adottato dai geometri dell'antichità. Nel *Lexicon* di Liddell-Scott l'unico riferimento del termine μετρητική sono i dialoghi di Platone. Finché gli oggetti geometrici si lasciano manipolare attraverso i numeri, non c'è bisogno di alcuna teoria autonoma e speciale della misurazione – la teoria dei λόγοι è del tutto sufficiente. È solo a cominciare dalla conoscenza delle linee incommensurabili, irrazionali – e quindi in realtà prive di misura –, che si presenta l'esigenza imperativa di una teoria della misurazione, di una μετρητική. E la μετρητική, opera di Platone, è contenuta, in fondo, nella teoria della *diade infinita e l'Uno*: i due termini, infiniti, della diade rappresentano i dati successivi dell'operazione di misurazione, la quale si prolunga indefinitamente senza giungere a un compimento – mentre l'Uno rappresenta la misura esatta nella forma di una entità aritmetica monadica –, un numero rrazionale.

La prima via d'uscita dalla difficoltà provocata dalla minaccia di

[13] *(N.d.T.) μετρητικὴ τέχνη, come appare chiaro in *Prot.* 356d4 (ἡ μετρητικὴ τέχνη...), ma Platone usa il termine, con valore di sostantivo, anche da solo. Nello stesso *Protagora*, ad esempio, in 357a, ma anche in altri dialoghi. Naturalmente questo uso sostantivato parte dal presupposto che sia sempre sottinteso τέχνη, ma è anche giusto, come osserva Toth, che almeno un vocabolario, e non è un caso che sia il più importante, registri l'uso di μετρητική nella sua accezione sostantivata.

"grandezze senza lunghezza" è stata proposta da Teeteto, assegnando indirettamente il predicato "commensurabile" a un segmento di retta per sua natura *incommensurabile*, mercé la *potenza*, δύναμις, id est *il potere* che esso ha *di dare origine alla figura piana* (τοῖς δ' ἐπιπέδοις ἃ δύνανται: *Theaet.* 148b) *di un quadrato d'area commensurabile*, avente, in questo caso particolare, un'area espressa da un numero non quadrato (ἀριθμὸν ... τὸν ἑτερομήκη: *Theaet.* 148a-b), come 2, 3, 5, ..., 17, etc. La terminologia degli *Elementi* di Euclide, di conseguenza, parlerà di coppie di *segmenti di retta commensurabili in potenza* (εὐθεῖαι δυνάμει σύμμετροι); commensurabili, quindi, unicamente attraverso la commensurabilità di aree delle *superfici quadrate* (ὅταν τὰ ἀπ' αὐτῶν τετράγωνα τῷ αὐτῷ χωρίῳ μετρῆται: *Elem.* X, def. 2) i segmenti di retta delle quali, costituenti i due termini della coppia, sono i lati di una figura rettangolare in uno spazio bidimensionale. Il termine *commensurabile*, quindi, è da assegnare a questi segmenti di retta unicamente nel loro piano d'immersione: essi sono commensurabili per la mediazione di un quadrato che generano; restano sempre incommensurabili in rapporto al loro proprio spazio di immersione che è quello di una linea unidimensionale.

4. *La "potenza", δύναμις, di Teeteto: numero irrazionale, radice quadrata di un numero non quadrato*

La "lunghezza", μῆκος, è evidentemente la misura pitagorica di un segmento di retta dato; questo comporta implicitamente che gli si assegni un numero naturale, ἀριθμός, o razionale, λόγος.

Al contrario, il nuovo termine, δύναμις, è sì tenuto a designare una proprietà comunemente considerata *lunghezza*, ma una lunghezza che – come è indicato dal nome diverso e anomalo che gli ha dato Teeteto – non può essere identica alla lunghezza pitagorica, μῆκος, e, quindi, non può venire espressa in termini aritmetici di numero, o attraverso un rapporto tra due numeri, un λόγος pitagorico. Di conseguenza è una lunghezza della quale il "*nome*" è necessariamente "ineffabile", ἄρρετος (v. Plat. *Hipp. maj.* 303b, *Rsp.* 546c).

Così, secondo la terminologia di Teeteto, un segmento di retta non commensurabile (con l'unità di misura della lunghezza) diviene misurabile, in modo indiretto, per la *potenza* di generare una superficie *piana* (ὡς μήκει μὲν οὐ συμμέτρους ἐκείναις, τοῖς δ' ἐπιπέδοις ἃ δύνανται: Plat. *Theaet.* 148b) e, in tal modo, l'in sé ineffabile diviene indirettamente dicibile. Nel libro X degli *Elementi* (consacrato interamente alle figure irrazionali e del quale l'essenziale risale con ogni probabilità a Teeteto) queste linee incommensurabili in lunghezza e quindi irrazionali, ma commensurabili per la loro potenza (di dare origine a un quadrato la cui area è espressa da un numero non quadrato), sono classificate nella categoria "effabili" (ῥηταί) – insieme alle linee del tutto commensurabili, che dispongono di una lunghezza, μῆκος, razionale: i segmenti dunque, la lunghezza dei quali è uguale, p. es., a 2 o $\sqrt{2}$ sono entrambi effabili. La lunghezza 2 è in sé e per sé dicibile, la lunghezza $\sqrt{2}$ è "dicibile" a causa del suo quadrato, $\sqrt{2}\cdot\sqrt{2} = 2$ (καλείσθω ... καὶ αἱ ταύτῃ σύμμετροι εἴτε μήκει καὶ δυνάμει εἴτε δυνάμει μόνον ῥηταί: *Elem.* X, def. 3).

Il termine *irrazionale*, ἄλογος, è riservato, nello stesso libro X, ai segmenti incommensurabili anche in potenza. Sono – nella terminologia attuale – delle "irrazionalità algebriche". I segmenti di retta che le rappresentano *non dispongono* della potenza di generare quadrati la cui area è esprimibile con un numero – quadrato o non quadrato è indifferente. È il caso, p. es., della diagonale del pentagono regolare il lato del quale è uguale a 2, e la cui lunghezza non può essere espressa che dal numero irrazionale algebrico $1 + \sqrt{5}$. L'area del quadrato generato da questo segmento di retta non è un numero naturale – né quadrato né non quadrato[14]. Al contrario, nel dominio d'essere bidimensionale del piano, il predicato "irrazionale", ἄλογος, è assegnato a ogni area quadrata semplicemente incommensurabile con il quadrato-unità (τετράγωνον ... ἀσύμμετρα ἄλογα καλείσθω: *Elem.* X, def. 4).

Comunque sia, il termine δύναμις del *Teeteto* (147d) di Platone ha certamente lo stesso valore semantico del termine tecnico attuale "numero irrazionale". D'altro lato, la lunghezza della diagonale del pentagono regolare di lato 2 espressa con l'irrazionale algebrico $1+\sqrt{5}$, già citato sopra, non permette alcuna rappresentazione con l'aiuto di una figura quadrata; non dispone, quindi, di nessuna δύναμις che dia origine a un quadrato, ed è stata sempre, infatti, qualificata con il termine ἄλογος (v. *Elem.* XIII, 6).

[14] Infatti essa non è esprimibile che con il numero ancora algebrico: $1 + \sqrt{5}$ – e questo costituisce un ἄλογος, quindi un *irrazionale*, anche nell'accezione del Libro X degli *Elementi*.

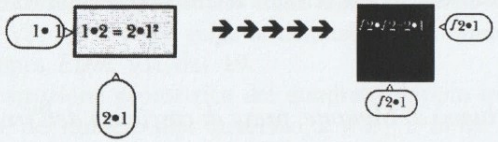
5. *Il divino miracolo dell'*Epinomide *e le lunghezze irrazionali nel* Teeteto

Il passo 147d-148b del *Teeteto* sembra essere nient'altro che la messa in scena drammatica del *miracolo quasi divino* che dispone del *potere sovrumano* di trasformare un *numero non quadrato*, come 3, 5, ... in un numero quadrato, del quale Platone parlerà in *Epinomide* 990d.

In questo celebre passo, Platone parla, con un tono di meraviglia estatica, di un miracolo (θαῦμα), un vero miracolo che va oltre l'umano (οὐκ ἀνθρώπινον), *un miracolo che appartiene piuttosto all'opera del divino* (ἀλλὰ γεγονὸς θεῖον) *almeno per tutti quelli che sono in grado di capire* (τῷ δυναμένῳ συννοεῖν) *di che si tratta.* L'argomento di cui si tratta consiste – detto nel linguaggio della terminologia attuale – nell'improvviso rovesciamento di un numero, che *per sua natura non è un numero quadrato* (οὐκ ὄντων ... φύσει ἀριθμῶν), ma si trasforma in un numero quadrato per mezzo di una costruzione eseguita sul piano geometrico (πρὸς τὴν τῶν ἐπιπέδων μοῖραν γεγονυῖα: *Epin.* 990d). È precisamente l'operazione di cui si sono serviti Teeteto e Teodoro in *Theaet.* 147d, per costruire delle superfici quadrate le aree delle quali sono espresse da numeri non quadrati.

L'universo bidimensionale dell'estensione geometrica:

La trasformazione geometrica di una figura piana rettangolare, l'altezza della quale è uguale a 1, la base a 2 unità e l'area 2 unità di misura d'area piana [1^2], in una superficie quadrata della quale i due lati sono uguali al numero irrazionale $\sqrt{2}$.



1 = unità di misura delle lunghezze; 1^2 = unità di misura dell'area piana

$$1 \cdot 2 = 2 \rightarrow \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}$$

Universo lineare dei numeri:

La mutazione aritmetica di un numero non-quadrato, $2 = 1 \cdot 2$, composto di due fattori diversi, 1 e 2, in un numero quadrato, $2 = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}$, composto di due fattori numerici uguali, identici ambedue al numero irrazionale $\sqrt{2}$.