

Storia e Fondamenti della Matematica
a.a. 2022/2023

Traccia d'esame – Giugno 2023 - 2

L'evoluzione del concetto di numero è un motivo centrale della storia della matematica. Prendendo spunto dal brano allegato (sezioni 19-21) tratto dai *Fondamenti dell'Aritmetica* (1884) di Gottlob Frege, esprimersi criticamente sui seguenti punti, nel modo in cui vengono affrontati dall'autore, e alla luce del pensiero di culture anche diverse dalla nostra attuale:

- la distinzione fra numeri e grandezze;
- il legame tra concetti numerici ed elementi linguistici;
- il *rapporto* e la frazione;
- la nozione di unità.

LOGICA E ARITMETICA

Gottlob Frege

Scritti raccolti a cura di Corrado Mangione

Paolo Boringhieri - Torino



A tale scopo dovremo probabilmente discutere anche il concetto di unità e di aumento di un'unità, sicché pure le definizioni dei singoli numeri subiranno qualche ritocco.

19. LA DEFINIZIONE DI NUMERO NATURALE NON PUÒ ESSERE DI CARATTERE GEOMETRICO Prima di tutto voglio oppormi al tentativo di definire il numero come rapporto fra grandezze geometriche (lunghezze o superfici). È ovvio che si è fatto ricorso a esso, sperando di facilitare in tal modo le molte applicazioni dell'aritmetica alla geometria; così si riusciva a porre nel più intimo rapporto gli inizi stessi delle due scienze.

Newton ¹ vuole che si intenda per numero, non tanto un insieme di unità, quanto il rapporto esatto fra una qualsiasi grandezza e un'altra della stessa specie, presa come unità di misura. Orbene: si può concedere che per questa via riusciremmo a spiegare il numero in un senso generale, entro cui rientrano pure le frazioni e i numeri irrazionali; va osservato però che essa presuppone come già conosciuti i concetti di grandezza e di rapporto fra grandezze. Ma è noto che Euclide ha proprio bisogno del concetto di equimultipli per definire l'uguaglianza di due rapporti fra grandezze, e che questo concetto discende a sua volta da quello di uguaglianza fra numeri naturali. Se ne conclude dunque, che la spiegazione precisa del concetto di numero naturale risulta tutt'altro che superflua.

Potrebbe darsi — obietterà qualcuno — che l'uguaglianza di due rapporti fra grandezze geometriche fosse definibile anche in modo diverso da quello di Euclide, epperò indipendentemente dal concetto di numero naturale. Ma allora resterebbe dubbio in quale relazione si trovi il numero così definito per via geometrica con il numero di cui si fa uso nella vita comune. Quest'ultimo resterebbe quindi completamente scisso dalla scienza. Eppure sembra ben lecito pretendere che l'aritmetica debba riannodarsi in qualche modo a qualsiasi applicazione del numero, anche se l'applicazione in sé non è precisamente affar suo. Lo stesso conteggio comune deve trovare nella scienza la base del suo modo di procedere. Né meno grave è la domanda se il concetto geometrico di numero possa bastare alla stessa aritmetica,

¹ BAUMANN, *op. cit.*, vol. I, p. 475.

intesa come scienza, quando essa si trova a parlare del numero di radici di un'equazione, o del numero degli interi che sono primi con un intero dato e minori di esso, o di questioni analoghe. Si vede subito, viceversa, che il numero, che risponde alla domanda "quanti?", è pure in grado di determinare quante unità di lunghezza sono contenute in una lunghezza assegnata. E anche il calcolo coi numeri negativi, fratti, e irrazionali si riconduce al calcolo coi numeri naturali.

Ma Newton, definendo il numero come rapporto fra grandezze, voleva forse intendere per grandezze, non soltanto quelle geometriche, bensì anche gli insiemi. Allora però la sua spiegazione diventa inefficace, perché, fra le due espressioni "numero degli elementi di un insieme" e "rapporto fra l'insieme e una delle unità che lo compongono", l'ultima non è affatto più chiara della prima.

20. È IL NUMERO DEFINIBILE? HANKEL, LEIBNIZ Il primo problema sarà, se il numero sia definibile. Hankel è di parere contrario:¹ "Ciò che suol esprimersi col dire che pensiamo, o poniamo, un oggetto una volta, due volte, tre volte, ecc. è qualcosa di indefinibile per la semplicità che spetta, di principio, al concetto del porre." Rispondiamo però che qui non si tratta del concetto del porre, quanto del porre una volta, due volte, ecc. Se potesse venir definito quest'ultimo, poco ci turberebbe la indefinibilità del primo.

Leibniz propende a considerare il numero, almeno approssimativamente, come idea "adeguata", cioè come idea così chiara, che tutto quanto fa parte di essa è pure chiaro.

Se in genere vi è la tendenza a considerare il numero naturale come indefinibile, ciò dipende però, non tanto da motivi insiti nella cosa stessa, quanto dalla cattiva riuscita dei tentativi rivolti a tale scopo.

I numeri naturali costituiscono una proprietà delle cose esterne?

21. OPINIONI DI MORITZ CANTOR E DI ERNST SCHRÖDER Cerchiamo per lo meno di caratterizzare la posizione che il concetto di numero naturale ha fra gli altri concetti. Nella lingua i numeri compaiono per

¹ HANKEL, *op. cit.*, p. I.

lo più sotto forma di aggettivi e funzionano da attributi, allo stesso modo che i termini “duro, pesante, rosso”, che denotano proprietà degli oggetti esterni. Sorge quindi naturale la domanda, se occorra concepire così anche i numeri, sicché il concetto di numero naturale vada posto sullo stesso piano per esempio del concetto di colore.

Tale sembra l'opinione di Moritz Cantor,¹ allorché dice che la matematica è una scienza empirica, traendo inizio dallo studio di oggetti del mondo esterno. Soltanto con l'astrazione si otterrebbe, secondo lui, il numero.

Ernst Schröder ritiene² che il numero riproduca la realtà, sia ricavato da essa, in quanto le unità dell'aritmetica starebbero a rappresentare gli oggetti unitari. Questa rappresentazione degli oggetti per mezzo delle unità, è ciò che egli chiama astrazione. In essa le unità ritrarrebbero gli oggetti solo rispetto alla loro frequenza, separando questa dalle altre proprietà delle cose (dal colore, dalla forma, ecc.). In questa spiegazione il termine frequenza è soltanto un sinonimo del termine “numero intero”. Schröder pone dunque la frequenza, cioè il numero, sullo stesso piano del colore e della forma, considerandola essa pure come una proprietà delle cose.

22. OPINIONE CONTRARIA DI BAUMANN: SECONDO LUI GLI OGGETTI ESTERNI NON RAPPRESENTANO DELLE VERE UNITÀ. IL NUMERO CHE SPETTA A UN OGGETTO DIPENDE PALESEMENTE DAL NOSTRO MODO DI CONCEPIRE
Baumann³ respinge l'opinione che i numeri siano concetti ricavati dalle cose esterne: “Infatti le cose esterne non presentano alcuna proprietà rigorosa; esse ci danno gruppi separati o punti sensibili, ma questi gruppi e punti possono a loro volta venire considerati come delle nuove molteplicità.” In realtà, mentre nessuno è in grado di modificare sia pure minimamente il colore o la durezza di un oggetto, mutando solo il proprio modo di concepirlo, è invece possibile concepire l'*Iliade* vuoi come un unico poema, vuoi come ventiquattro canti, vuoi come un gran numero di versi.

¹ M. CANTOR, *Grundzüge einer Elementarmathematik* [Lineamenti di matematica elementare], p. 2, § 4. Similmente si esprime LIPSCHITZ, *op. cit.*, p. 1.

² SCHRÖDER, *op. cit.*, pp. 6, 10 sg.

³ BAUMANN, *op. cit.*, vol. 2, p. 669.