Storia e Fondamenti della Matematica
a.a. 2020/2021

Traccia d'esame – Luglio 2021 - 1

I numeri interi non sono soltanto oggetti su cui si applicano operazioni: si possono anche utilizzare per esprimere relazioni. Alla luce del presente brano, tratto da una versione italiana de *I Principi della matematica* di Bertrand Russell, si trattino i seguenti aspetti, anche con riferimento ad altre opere di questo o di altri autori, secondo una prospettiva storica:

- il concetto di frazione ed il calcolo frazionario;
- la nozione di rapporto, in aritmetica e in geometria;
- unità, molteplicità e divisibilità tra matematica e filosofia;
- l'incommensurabilità.

RAPPORTI E FRAZIONI

144 IL PRESENTE capitolo, in quanto tratta di relazioni fra interi, è essenzialmente limitato agli interi *finiti*: i numeri infiniti non hanno relazioni esattamente analoghe a quelle che comunemente si chiamano rapporti. Io distinguerò i rapporti, come relazioni tra interi, dalle frazioni, che sono relazioni tra aggregati, o meglio tra le loro grandezze di divisibilità; troveremo che le frazioni possono esprimere delle relazioni, che risultano valide quando ambedue gli aggregati sono infiniti. Sarà necessario iniziare con la definizione matematica di rapporto, prima di procedere a considerazioni più generali.

Il rapporto viene comunemente associato con la moltiplicazione e la divisione, e in questo modo diventa indistinguibile dalle frazioni. Ma la moltiplicazione e la divisione sono egualmente applicabili ai numeri finiti ed agli infiniti, benché nel caso dei numeri infiniti esse non abbiano quelle proprietà che nel caso dei numeri finiti le collegano col rapporto. È quindi desiderabile elaborare una teoria del rapporto che sia indipendente dalla moltiplicazione e dalla divisione.

Si dice che due numeri finiti sono consecutivi quando, se u è una classe che ha uno di questi numeri, e le si aggiunge un termine, la classe risultante ha l'altro numero. L'essere consecutivo è perciò una relazione uno-uno e asimmetrica. Se ora un numero a ha verso un numero b l'n^{sima} potenza di questa relazione di consecutività (essendosi definite le potenze delle relazioni mediante la moltiplicazione relativa), allora abbiamo $a + n = b$. Questa equazione esprime, tra a e b una relazione uno-uno che è determinata quando sia dato n. Orbene, se tra a' e b' è validala potenza m^{sima} di questa relazione, noi avremo $a' + m\,n = b'$. Possiamo pure definire $m\ n$ come $0 + m\,n$. Se ora noi abbiamo tre numeri, a, b, c, tali che $a\,b = c$, questa equazione esprime una relazione uno-uno tra a e c che è determinata quando sia dato b. Chiamiamo B questa relazione. Supponiamo di avere anche $a'\,b' = c$; allora α avrà verso a' una relazione che è il prodotto relativo di B e dell'inversa di B' ove B' venga derivata da b' come B era derivata da b. Questa relazione è ciò che noi definiamo il rapporto di a' rispetto ad a. La teoria qui accennata ha il vantaggio di applicarsi non soltanto agli interi finiti, ma anche a tutte le altre serie dello stesso tipo; cioè a tutte le serie del tipo che chiamerò progressioni.

145 L'unico punto che, per il nostro scopo presente, importa osservare riguardo alla definizione ora riferita dei rapporti, è: che essi sono relazioni uno-uno tra interi finiti; e queste relazioni sono asimmetriche con una eccezione, sono tali che tra qualsiasi determinata coppia di interi finiti ne risulta valida una e una soltanto, sono definibili in termini di consecutività, e formano esse stesse una serie che non ha un primo né un ultimo termine, ma ha sempre un termine, e quindi un numero infinito di essi, fra due termini dati qualunque essi siano. Dal fatto che i rapporti sono relazioni, deriva che nessun rapporto dovrà essere identificato con un intero: il rapporto di 2 rispetto a 1 è un'entità completamente differente da 2. Perciò quando parliamo della serie dei rapporti come se contenesse degli interi, gli interi che si dicono in essa contenuti non sono numeri cardinali, bensì sono relazioni che hanno una certa corrispondenza uno-uno con i numeri cardinali. La stessa osservazione si applica ai numeri positivi e negativi. La n^{sima} potenza della relazione di consecutività è il numero positivo n, che evidentemente è un concetto del tutto differente dal numero cardinale n. La confusione di entità con altre, verso le quali esse hanno qualche importante relazione uno-uno, è un errore a cui vanno molto soggetti i matematici, è che ha prodotto gravissimo danno nella filosofia della matematica. In séguito troveremo innumerevoli altri esempi dello stesso errore, ed è bene capire, il più presto possibile, che qualsiasi mancanza di sottigliezza di distinzioni causerà certamente, almeno in questo argomento, le più disastrose conseguenze.

Non vi è alcuna difficoltà a mettere in relazione la suddetta teoria del rapporto con la teoria ordinaria derivata dalla moltiplicazione e divisione. Ma la teoria ordinaria non mostra, come la presente, per qual motivo gli interi infiniti non abbiano rapporti esattamente analoghi a quelli degli interi finiti. Il fatto è che il rapporto dipende dalla consecutività, e la consecutività, come fu definita più sopra, non esiste tra gli interi infiniti, poiché questi restano immutati con l'addizione di 1.

Si dovrebbe osservare che ciò che si chiama addizione di rapporti richiede un nuovo insieme di relazioni tra rapporti, relazioni che possono venir chiamate rapporti positivi e negativi proprio come certe relazioni tra interi sono chiamate interi positivi e negativi. Questo argomento, tuttavia, non ha bisogno di ulteriore sviluppo.

146 La suddetta teoria del rapporto, occorre confessarlo, ha un aspetto estremamente artificiale, e tale da far sembrare straordinario che i rapporti debbano incontrarsi nella vita quotidiana. Di fatto non sono i rapporti ma le frazioni quelle che si incontrano, e le frazioni non sono puramente aritmetiche, ma si riferiscono in realtà alle relazioni tra tutto e parte.

Le proposizioni che asseriscono frazioni rivelano una differenza importante rispetto a quelle che asseriscono interi. Possiamo dire che A è uno, A e B sono due, e così via; ma non possiamo dire che A è un terzo, oppure che A e B sono due terzi. A tale scopo si richiede sempre qualche seconda entità, verso cui la prima abbia una relazione di frazione. Noi diciamo che A è un terzo di C, A e B insieme sono due terzi di C, e così via. Le frazioni, in breve, sono o relazioni di una parte semplice con un tutto, o di due tutti l'uno con l'altro. Ma non è necessario che uno dei tutti considerati, o la parte semplice, debba essere parte dell'altro tutto. Nel caso dei tutti finiti, la questione sembra semplice: la frazione esprime il rapporto tra il numero di parti contenute nell'uno e il numero di parti contenute nell'altro. Ma la considerazione dei tutti infiniti ci dimostrerà che questa teoria così semplice non è adeguata ai fatti.

147 Non vi è alcun dubbio che la nozione di mezza lega o mezza giornata è una nozione legittima. Perciò è necessario trovare per le frazioni qualche senso in cui esse non dipendano essenzialmente dal numero. Se infatti si vuol dividere un dato periodo di ventiquattro ore in due porzioni continue, ognuna delle quali debba essere metà dell'intero periodo, vi è soltanto un modo di far ciò: eppure Cantor ha dimostrato che qualsiasi modo possibile di dividere il periodo in due porzioni continue lo divide sempre in due porzioni che hanno lo stesso *numero* di termini. Vi dovrà essere quindi qualche altro lato rispetto a cui due periodi di dodici ore risultano uguali, mentre un periodo di un'ora e un altro di ventitré risultano disuguali. Avrò da dire qualcosa di più su quest'argomento nella parte terza; per ora voglio far notare che ciò di cui abbisogniamo ha la natura della grandezza, e deve essere essenzialmente una proprietà dei tutti ordinati. Chiamerò questa proprietà *grandezza di divisibilità*. Orbene, che A è una metà di B, significa: B è un tutto, e se B vien diviso in due parti equipotenti, ciascuna delle quali abbia la stessa grandezza di divisibilità dell'altra, allora A avrà la stessa grandezza di divisibilità di ognuna di queste parti. La frazione $1/2$ può venire interpretata un po' più semplicemente, considerandola come relazione (analoga al rapporto per quanto riguarda i tutti finiti) tra due grandezze di divisibilità. Allo stesso modo le frazioni intere (come $n/1$) misureranno la relazione di divisibilità di un aggregato di n termini rispetto alla divisibilità di un singolo termine; la relazione inversa sarà $1/n$. Abbiamo dunque ancora una nuova classe di entità che corre il pericolo di essere confusa con i numeri interi cardinali, sebbene in realtà ne sia completamente distinta. Le frazioni, come le abbiamo interpretate ora, hanno il vantaggio (su cui si basa tutta la geometria metrica) di introdurre una discriminazione di maggiore e minore, tra aggregati infiniti aventi lo stesso numero di termini. Vedremo sempre meglio, man mano che sarà messa in luce l'inadeguatezza dei metodi ordinari di misurazione, quanto sia, in realtà, assolutamente essenziale la nozione di grandezza di divisibilità. Le frazioni, dunque, nel senso in cui possono esprimere relazioni fra aggregati infiniti, e questo è il senso che abitualmente posseggono nella vita quotidiana, hanno veramente la natura di relazioni tra grandezze di divisibilità; e le grandezze di divisibilità sono misurate dai numeri delle parti, soltanto là dove gli aggregati che si considerano sono finiti. Si può anche osservare (benché questa sia un'osservazione prematura) che: mentre i rapporti, nel senso in cui furono definiti sopra, sono essenzialmente razionali, le frazioni, nel senso che è stato loro attribuito qui, sono anche suscettibili di valori irrazionali. Ma lo sviluppo di questo argomento deve essere rinviato alla parte quinta.