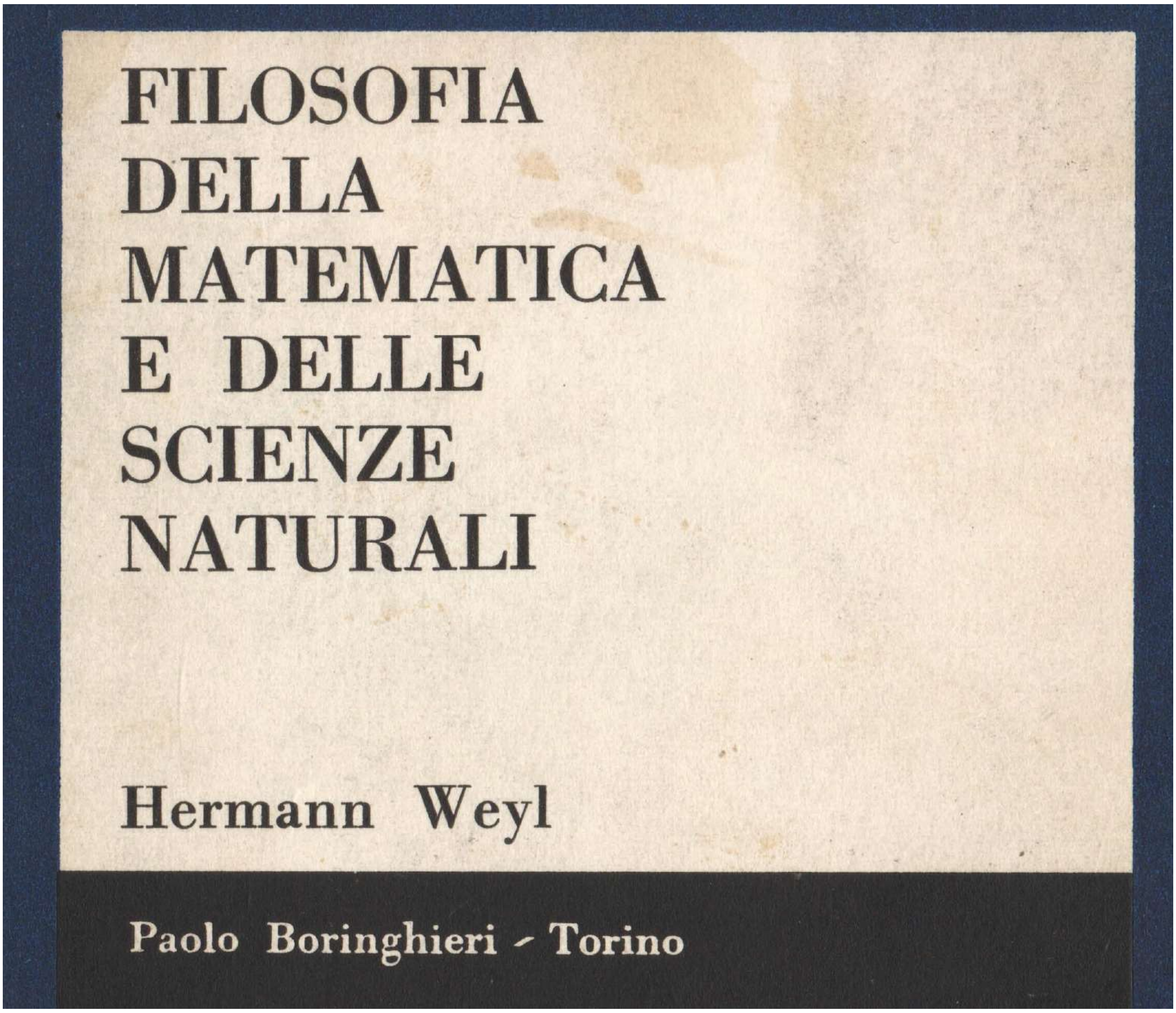
Storia e Fondamenti della Matematica
a.a. 2020/2021

Traccia d'esame – Giugno 2021 - 1

La matematica non è solo la scienza della *quantità*, benché a quest'ultima, in definitiva, si riconducano i suoi principali fondamenti epistemologici. Alla luce del presente brano di Hermann Weyl (1885-1955), si trattino i seguenti aspetti, anche con riferimento ad altre opere di questo o di altri autori, secondo una prospettiva storica:

- il rapporto fra aritmetica e geometria;
- analisi e sintesi nella costruzione della conoscenza;
- il ruolo dei simboli;
- il numero nella filosofia greca.



11. *Sul carattere della conoscenza matematica*

Da tempo immemorabile la matematica è stata considerata come la scienza della quantità, o come la scienza dello spazio e dei numeri. (In Leibniz, tuttavia, la *mathesis* rispondente a tale definizione è solo

[1] D. Hilbert, *Ueber das Unendliche*, Math. Ann., vol. 95, p. 190.

una parte della piú comprensiva *ars combinatoria.*) Questo punto di vista appare oggi troppo ristretto, se si tien conto di campi quali la geometria proiettiva o la teoria dei gruppi. Di conseguenza non occorre preoccuparsi in modo particolare di una determinazione esatta di ciò che si intende per quantitativo. Del resto lo sviluppo stesso della matematica ha messo in dubbio il fatto che la quantità sia una categoria ben determinata e filosoficamente importante. La geometria, in quanto si occupa dello spazio reale, non è piú considerata come una parte della matematica pura: al pari della meccanica e della fisica, essa fa parte delle applicazioni della matematica. Sotto l'influenza dell'aritmetica generale dei numeri ipercomplessi e, piú tardi, delle ricerche assiomatiche, della teoria degli insiemi e della logica simbolica, si è gradualmente cancellata la distinzione fra matematica e logica. "La matematica è la scienza che ricava conclusioni necessarie", dichiara B. Peirce nel 1870. Nelle *Logische Untersuchungen* [Ricerche logiche] di Husserl [1] e nella *Introduction to Mathematical Philosophy* [Introduzione alla filosofia matematica] di Russell [2] si discute dettagliatamente la definizione della "matematica o logica".

La crisi generata dalle antinomie della teoria degli insiemi — sia che si segua l'intuizionismo radicale di Brouwer o il simbolismo di Hilbert — pone di nuovo in netto rilievo il carattere peculiare della matematica· Al pari di Platone, Brouwer considera la "duo-unità" (*two-oneness*) come la radice del pensiero matematico. "Questo neo-intuizionismo considera come fatto essenziale dell'intelletto umano il separarsi di momenti della vita in parti qualitativamente diverse, che soltanto se separate dal tempo possono unificarsi, e come fatto essenziale del pensiero matematico l'astrarre questo separarsi da ogni sentire fino all'intuizione pura della duo-unità." Abbiamo visto piú volte come lo schema di suddivisione di un continuo unidimensionale consista in un "uno che diventa due".[3] Gli interi nel sistema binario si ottengono nello stesso

[1] Husserl, *Logische Untersuchungen* cit., vol. 1, "Die Idee der reinen Logik".
[2] Russell, *Introduzione alla filosofia matematica* cit.
[3] Allusione alla frase "Da wurde Eins zu Zwei" con cui Nietsche descrive l'esperienza di Zarathustra in molti dei suoi poemi, per esempio in *Sils Maria*: "Da, plötzlich, Freundin, wurde Eins zu Zwei und Zarathustra ging an mir vorbei..."

modo. Secondo Stenzel[1] probabilmente Platone pensava i numeri disposti secondo tale schema; ma poiché in questo caso la scissione di "uno in due" conduce a numeri sempre piú grandi, mentre nel continuo noi scendiamo a parti sempre piú piccole, egli si riferisce a questa dualità (*twoness*) come al "grande-piccolo".[2] Per gli interi appare piú appropriato l'ordine naturale che Aristotele[3] introduce in opposizione alla concezione platonica del numero. Ma anch'esso può essere generato dalla duo-unità; partendo da una totalità indivisa, noi separiamo in essa un elemento (l'1), da conservare come unità, e un resto indiviso; poi dividiamo nuovamente tale resto in un elemento (il 2) e un resto indiviso, e cosí via. (Possiamo visualizzare tale processo come il ripetuto distacco di un segmento da una semiretta; il tempo è aperto verso il futuro, ma ogni volta che ci fermiamo ci accorgiamo che un altro tratto di tempo è stato vissuto.) In questo schema, non tutte le parti, ma solo la parte restante è soggetta a ulteriori bipartizioni.

Indipendentemente dal valore attribuito a questa riduzione ultima del processo mentale matematico alla duo-unità, l'*induzione completa* appare, dal punto di vista intuizionistico, come ciò che impedisce alla matematica di diventare una colossale tautologia e che conferisce alle sue asserzioni un carattere sintetico, non analitico. Il procedimento dell'induzione completa appare infatti ovunque un elemento decisivo. Se a tutta prima esso non sembra avere alcuna funzione nella geometria elementare (particolarmente nella geometria proiettiva elementare), questo dipende dall'ingenua applicazione di "tutti" e di "alcuni" ai punti. Dal punto di vista intuizionistico, questo non è ammissibile; il campo di costruzione della geometria è il continuo, suscettibile di una trattazione matematica esatta solo dopo che sia stato "intessuto" con una rete di suddivisioni simile a quella precedentemente descritta (cfr. anche § 15).

Dal punto di vista formalistico la componente transfinita degli assiomi sostituisce l'induzione completa e imprime il suo marchio sulla matematica. Questa non consta piú di verità evidenti: è un'*audace costru-*

[1] Stenzel, *Zahl und Gestalt bei Plato und Aristoteles* (1924).
[2] Si veda, comunque, per un'interpretazione diversa, H. Cherniss, *The Riddle of the Early Academy* (University of California Press, Berkeley 1945).
[3] Aristotele, *Metafisica*, A6 e M6.

zione teorica, e come tale proprio l'opposto dell'auto-evidenza analitica. D'altro canto, in metamatematica nell'eseguire i passaggi di una dimostrazione, si opera per mezzo di una inferenza intuitiva da n ad $n+1$, e ci si occupa di "oggetti concreti, extralogici, che possono essere completamente trascurati in ogni loro parte e la cui indicazione, differenziazione, successione o coordinamento sono assegnati intuitivamente con gli oggetti come qualcosa che non può né deve essere ricondotto ad altro" (Hilbert). Hilbert è quindi d'accordo con Kant [1] che già mise in rilievo nell'algebra la costruzione simbolica mediante segni concreti secondo cui "la matematica possiede un contenuto che è certo indipendentemente da ogni logica, e che perciò non può essere basato sulla sola logica". [2]

Bisogna riconoscere tuttavia che secondo l'uso kantiano delle parole "analitico" e "sintetico", almeno una singola equazione, come $3+2=5$, dovrebbe essere chiamata analitica; perché, come ha dimostrato Leibniz, essa segue logicamente dalle definizioni

$$3+1=4, \qquad 4+1=5, \qquad (a+1)+1=a+2,$$

e quindi "è già contenuta nei concetti" dei numeri 3, 5 e dell'operazione $+2$. Diversamente, quale significato annetteva Kant a questi simboli?

La matematica, indubbiamente, è *a priori*. Essa non è, come J. S. Mill vuol far credere, fondata sull'esperienza, nel senso che solo ripetute osservazioni di singoli casi numerici conferirebbero un crescente grado di verosimiglianza a teoremi aritmetici come

$$m+n=n+m,$$

che si intendono valere per numeri arbitrari.

Uno dei tratti piú importanti di tutta la matematica, che la rende cosí inaccessibile al profano, è l'abbondante uso di *simboli*. L'intuizionista non considera questa come una caratteristica essenziale; egli vede nei simboli, come in ogni linguaggio scritto o parlato, semplicemente uno strumento di comunicazione e un appoggio per fissare la memoria.

[1] KANT, *Critica della ragione pura* cit. (1781) p. 717.
[2] HILBERT, *Ueber das Unendliche* cit., p. 171.

Non cosí il formalista. Egli pensa la matematica come consistente esclusivamente di simboli, che non posseggono un significato verificabile mediante l'intuizione basata sui sensi o sull'intelletto, ma sono manipolati secondo regole fisse. D'altro canto il linguaggio gli serve (per esempio nella descrizione delle sostituzioni o delle regole pratiche di inferenza, come pure nei ragionamenti metamatematici) come mezzo per comunicare modi di procedere e atti di pensiero significanti. (La comunicazione rimane sempre esposta al rischio dell'incomprensione.) "Nelle figure geometriche prima, nelle formule matematiche poi", dice A. Speiser,[1] "la matematica si è liberata dal linguaggio; chi conosce il grande sforzo fatto in questa direzione e il suo sorprendente successo sempre rinnovantesi, non può fare a meno di sentire che oggi, all'interno del mondo intellettuale, la matematica è piú efficace, nella sua sfera particolare, di quanto non lo siano, nei rispettivi campi, i linguaggi moderni nelle loro deplorevoli condizioni di decadenza, e persino la musica." Nella sua metodologia trascendentale Kant [2] vede l'essenza della matematica nella costruzione: "La conoscenza filosofica è quella che la ragione ricava dai concetti, la conoscenza matematica è quella che essa ricava dalla costruzione dei concetti." Utilizzando come esempio il teorema della somma degli angoli in un triangolo, egli illustra come i teoremi geometrici si trovino non per mezzo di una analisi concettuale, ma attraverso la costruzione di punti e rette ausiliari convenienti. I dettagli della sua descrizione del procedimento costruttivo oggi non possono piú essere considerati soddisfacenti; è vero, tuttavia, che nella dimostrazione di un teorema matematico è quasi sempre necessario andare molto oltre il suo contenuto immediato. Il motivo di ciò sta nel fatto chiarito precedentemente, e cioè che una dimostrazione che procede secondo la regola di inferenza sillogistica non è una costruzione che progredisce monotonamente, ma una successione continua di aggiunte e di rimozioni: contrariamente a una formula, la cui formazione procede sempre nella stessa direzione e in cui i passi costitutivi restano perciò conservati nella configurazione finale. A me sembra che questa circostanza, insieme

[1] A. SPEISER, *Klassische Stücke der Mathematik* (1925) p. 148.
[2] KANT, *Critica della ragione pura* cit., p. 713.

ai punti 1, 2, e 3, enumerati nel paragrafo 6, dia una caratterizzazione adeguata della costruzione in opposizione alla riflessione pura.

Gli stadi attraverso cui la ricerca sui fondamenti della matematica è passata in tempi recenti corrispondono ai tre atteggiamenti epistemologici fondamentali. La posizione della teoria degli insiemi è lo stadio del *realismo ingenuo*, ignaro della transizione dal dato al trascendente. Brouwer, con la sua richiesta di riduzione di ogni verità a ciò che è dato intuitivamente, rappresenta l'idealismo. Nel formalismo assiomatico, infine, la coscienza compie il tentativo di "saltare sulla propria ombra", lasciandosi dietro il materiale del dato, per rappresentare il *trascendente*, ma (e come potrebbe essere altrimenti?) solo attraverso il *simbolo*. In epistemologia la filosofia occidentale ha aderito fondamentalmente, dall'epoca di Descartes, al punto di vista idealistico; ciononostante, essa ha ripetutamente cercato nella metafisica un accesso al regno dell'assoluto, e Kant, che intendeva lanciare il dardo una volta per tutte, fu ancora seguíto da Fichte, da Schelling e da Hegel. Non si può negare che è vivo in noi un desiderio teoretico che urge verso la totalità, e che risulta incomprensibile dal punto di vista puramente fenomenico. La matematica mostra questa situazione con particolare chiarezza; ma essa ci insegna che anche tale desiderio può essere soddisfatto a una sola condizione: che ci contentiamo del simbolo rinunciando all'errore mistico di attenderci che il trascendente cada nel cerchio illuminato della nostra intuizione. Finora soltanto nella matematica e nella fisica la costruzione teorica fondata sul simbolismo ha trovato quella solidità che la fa apparire "cogente" a chiunque abbia la mente aperta a tali scienze. Il loro interesse filosofico si basa principalmente su questo fatto.

Se, per riassumere, si volesse caratterizzare con una breve frase il nucleo centrale della matematica, si potrebbe ben dire: la matematica è la *scienza dell'infinito*. È stata una grande conquista dei Greci l'aver reso fruttuoso, ai fini dell'analisi della realtà, il conflitto fra finito e infinito. Noi abbiamo tentato qui di mettere in luce l'importanza passata e presente di questo conflitto (e dei tentativi fatti per superarlo) per la storia della conoscenza teorica. "L'infinito ha sempre mosso profondamente l'anima dell'uomo come nessun altro problema. L'infinito ha avuto una influenza stimolante e fertile sulla nostra mente, come nessun'altra idea. Ma l'infinito ha anche, piú di ogni altro concetto, bisogno di una chiarificazione." [1]

[1] HILBERT, *Ueber das Unendliche* cit., p. 713. Per uno sguardo ai vari risultati e problemi di cui oggi si interessa la ricerca matematica, il lettore può rivolgersi a R. COURANT e H. ROBBINS, *Che cos'è la matematica?* [(Boringhieri, Torino 1950); si veda anche H. MESCHKOWSKI, *Mutamenti nel pensiero matematico* (Boringhieri, Torino 1963)].