

Storia e Fondamenti della Matematica
a.a. 2019/2020

Traccia d'esame – Settembre 2020 - 3

La matematica come spunto di riflessione sulla natura della conoscenza: in questo brano, tratto dalla *Metafisica* di Aristotele, analizzare i riferimenti alla geometria e all'aritmetica, contestualizzandoli nella storia del pensiero scientifico, anche alla luce di altre opere dello stesso o di altri autori, esaminando in dettaglio i seguenti aspetti:

- la contrapposizione tra divisibilità e indivisibilità;
- il ruolo e la natura degli enti geometrici elementari;
- la classificazione della scienza;
- il rapporto tra numeri e grandezze.

LIBRO XIII

1. Si è detto qual è la sostanza delle cose sensibili: nel trattato di fisica si è parlato della materia, in seguito si
10 è parlato della sostanza in atto¹. Il problema sul quale ora si svolge la ricerca è il seguente: c'è, al di là delle sostanze sensibili, una qualche sostanza immobile e eterna, oppure non c'è? E se c'è, qual è? In primo luogo bisogna considerare le cose che sono state dette da altri, per non essere coinvolti negli stessi errori con essi se hanno detto qualcosa che non va, e per evitare di provare in noi delusione di noi stessi
15 se si trova che c'è qualche credenza comune a noi e agli altri, perché è un fatto apprezzabile se si riesce a dire qualcosa meglio, e qualcosa comunque non peggio di altri.

1. Ci sono due rinvii, il primo dei quali è esplicitamente riferito da Aristotele stesso alla *Fisica*, e su di esso non c'è discussione, perché tutti rimandano al libro I di quell'opera. Diversamente stanno le cose per il secondo rinvio. Ps. Alessandro rimanda al libro II della *Fisica*, pur osservando che entrambi i primi due libri di quell'opera trattano della materia e della forma (722, 14-17). Schwegler (IV, 296-297) dubita che entrambi i rinvii siano alla *Fisica* per l'avversativa δέ (1076 a, 10) con la quale è introdotto il secondo rinvio, e pensa che esso possa riferirsi a *Met.* VII-VIII e al *De coelo*. Bonitz (526-527) osserva che se l'indicazione di Schwegler per un rinvio interno a *Metafisica* è giusta, allora essa deve valere anche per il libro IX oltre il VII e l'VIII; ma egli preferisce seguire ps. Alessandro nel rinvio alla *Fisica*, e pensa all'ultima parte dell'opera, che tratta del principio motore in atto. Ross (II, 407-408) vi vede un rinvio a *Met.* VII-IX. Jaeger (*Entstehung*, pp. 97, 110) segue ps. Alessandro e Bonitz nell'interpretazione del rinvio, mentre in seguito (*Aristotele*, p. 278) ritiene che si tratti di un rinvio a *Met.* VII-IX. Düring (282) pensa che si tratti di un rinvio a *Met.* XII e ai primi due libri del *De coelo*. Come si vede questo è un altro dei rinvii la cui interpretazione dipende in gran parte dalle ipotesi che si fanno sulla natura e la struttura della *Metafisica* e dal modello dell'evoluzione del pensiero di Aristotele che si sceglie.

Su questi punti si sostengono due cose: che gli enti matematici, per esempio i numeri, le linee e le altre cose che appartengono allo stesso genere sono sostanze, e poi che sono sostanze le idee. Alcuni considerano le idee e i numeri matematici come generi diversi, altri dicono che essi hanno un'unica natura, e gli altri ancora che soltanto gli enti matematici sono sostanze¹. Bisogna perciò, in primo luogo, indagare intorno agli enti matematici, senza attribuire a essi nessun'altra natura oltre quella matematica, cioè senza tener conto se siano idee o no, e se siano principi e sostanze degli esseri oppure no, ma domandandosi soltanto se, come enti matematici, esistono o non esistono e, se esistono, in che modo esistono. In seguito, dopo queste cose, bisogna occuparsi separatamente delle idee stesse, in generale e giusto per la forma, perché il più è stato già ripetuto molte volte anche nelle argomentazioni correnti², e, dopo, a questa questione deve tornare il grosso del nostro discorso quando esamineremo se le sostanze e i principi degli esseri sono

1. Questa partizione delle dottrine sui numeri e sulle idee costituisce una delle strutture principali dell'impianto di questo libro, nel corso del quale tuttavia Aristotele non fa mai i nomi dei sostenitori di quelle dottrine. In base a citazioni esplicite di *Metafisica* è tuttavia possibile fare attribuzioni precise della prima e della terza dottrina. Nel libro VII (2, 1028 b, 19-27) Aristotele offre una tripartizione analoga di posizioni, anche se non formulate con gli stessi termini. Qui egli attribuisce esplicitamente a Platone la dottrina per la quale la sostanza soprasensibile comprende idee e entità matematiche che costituiscono due generi diversi. A Speusippo attribuisce la dottrina secondo la quale ci sono più specie di sostanze a cominciare dall'unità, ciascuna con i suoi principi, uno per i numeri, uno per le grandezze, e poi uno per l'anima. Non si tratta esattamente della dottrina qui menzionata, ma questa dottrina è menzionata esplicitamente nel libro XII (10, 1075 b, 37-1076 a, 3) in un contesto nel quale essa è collegata con la dottrina dei vari ordini di sostanze che si succedono, esplicitamente attribuita a Speusippo nel passo cit. del libro VII. Nel libro XIV (3, 1090 b, 13-20) la dottrina che ammette solo le entità matematiche è di nuovo connessa con la dottrina degli ordini diversi delle sostanze, alla quale vengono rivolte le stesse critiche che vengono rivolte nel libro XII. Perciò l'attribuzione della dottrina secondo la quale solo gli enti matematici sono sostanze è attribuita di solito a Speusippo, attraverso la mediazione della dottrina dei vari ordini di sostanze, attribuita esplicitamente da Aristotele a Speusippo (libro VII) e da Aristotele collegata con la dottrina della riduzione delle sostanze non sensibili agli enti matematici (libri XII e XIV). La seconda dottrina menzionata nel testo qui in questione è di solito attribuita a Senocrate sulla base di Asclepio (379, 17); ma Senocrate non è mai menzionato per nome nella *Metafisica*.

2. Cfr. n. 3 p. 140.

numeri e idee, perché questa è la ricerca che rimane come terza dopo quella condotta sulle idee stesse.

Se esistono gli enti matematici, è necessario che essi o siano nelle cose sensibili, come dicono alcuni, o siano separati dalle cose sensibili (ché altri asseriscono questa
 35 tesi)¹, oppure, se non sono in nessuno di questi due modi, o non esistono o esistono in qualche altro modo. Ma allora la nostra ricerca verterà non sul problema se esistono, ma intorno al modo in cui esistono.

2. Già si è detto nelle discussioni delle difficoltà² come sia impossibile che gli enti matematici si trovino nelle cose sensibili, e come questa sia una dottrina artificiosa, in quanto
 1076 b, 1 è impossibile che due solidi stiano insieme, e in quanto, poi, sempre in base allo stesso ragionamento, anche le altre potenze e nature dovrebbero essere nelle cose sensibili, e nessuna sarebbe separata³. Queste cose sono state dette prima, ma è evidente che, oltre a queste conseguenze, deri-
 5 verebbe che è impossibile dividere qualsiasi corpo, perché

1. La tesi della separazione degli enti matematici dalle cose rientra nel platonismo ortodosso, mentre la tesi che gli enti matematici esistono nelle cose sensibili è sempre stata considerata come una dottrina accademica ma sostenuta da platonici pitagorizzanti o da pitagorici platonizzanti. Non si tratta di dottrina pitagorica ortodossa, almeno secondo la presentazione aristotelica del pitagorismo, perché è una dottrina che implica la distinzione tra cose e numeri, mentre il pitagorismo sostiene che cose e enti matematici sono identici.

2. III, 2, 998 a, 7-19.

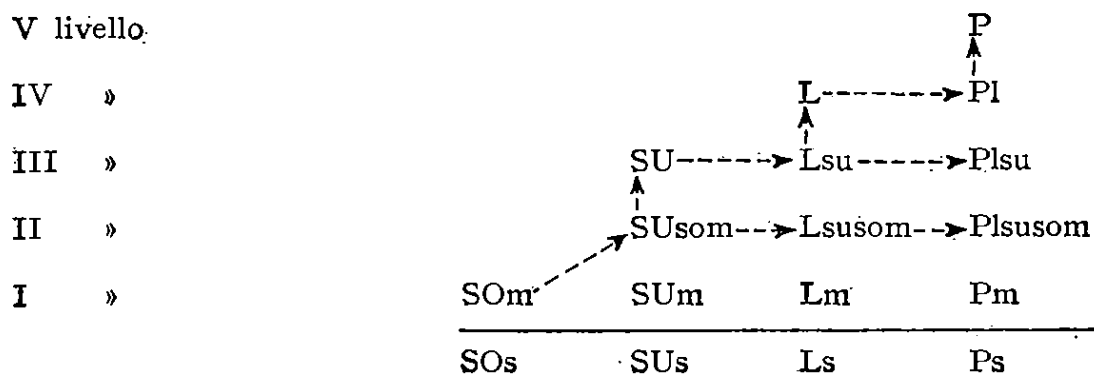
3. Ps. Alessandro intende δυνάμεις καὶ φύσεις (1076 b, 2) come i limiti dei solidi, le superfici e le linee, oppure gli oggetti dell'ottica e dell'armonica, e pensa che Aristotele abbia voluto dire che, poiché la dottrina dell'immanenza delle entità matematiche porta alla conseguenza assurda che due corpi dovrebbero occupare lo stesso luogo, sulla base di questo stesso ragionamento si può dimostrare che nelle cose sensibili non ci possono essere neppure le altre entità geometriche o ottiche o armoniche, come entità distinte dalle cose sensibili (725, 18-24). Bonitz (528) ha rifiutato l'interpretazione di ps. Alessandro, e ha proposto d'intendere quell'espressione riferita alle idee, che questi autori considerano come separate, ma la cui separazione sarebbe compromessa dall'immanenza degli enti matematici. Ross (II, 412) ha seguito Bonitz. Del resto in favore di questa interpretazione sta il fatto che Aristotele nel libro III (2, 998 a, 13), per mostrare che l'immanenza degli enti matematici comprometterebbe la separazione di quelle che son chiamate esplicitamente idee, dice che idee e entità intermedie sono τοῦ ... αὐτοῦ λόγου, che è la stessa espressione usata qui (1076 b, 2) per indicare il pericolo di compromettere la separazione di δυνάμεις καὶ φύσεις.

lo si dovrebbe dividere secondo la superficie, questa dovrebbe essere divisa secondo la linea, e la linea secondo il punto; ora, se è impossibile dividere il punto, sarà impossibile dividere anche la linea, e, se è impossibile dividere la linea, sarà impossibile dividere anche le altre entità. Del resto, che differenza c'è tra dire che codeste nature siffatte, che abbiamo indicato, sono quelle sensibili e dire che non sono proprio quelle sensibili, ma sono in esse? La conseguenza sarebbe la stessa: o con la divisione delle nature sensibili si dividono anche queste, o non si dividono neppure le sensibili. 10

Ma non è neppure possibile che nature di questo genere esistano separate. Infatti, se ci fossero solidi separati dai solidi sensibili, diversi da questi e anteriori a essi, è evidente che ci dovrebbero essere superfici separate anche al di là delle superfici sensibili, e la stessa cosa si dovrebbe poter dire per i punti e le linee, in base al medesimo ragionamento. 15 Ma, se ci sono queste entità separate, ce ne dovranno essere a loro volta altre al di là delle superfici, delle linee e dei punti del solido matematico, diverse da queste e separate da esse, perché i termini semplici precedono i composti. Inoltre se prima dei corpi sensibili ci sono corpi non sensibili, in base allo stesso ragionamento, anche prima delle superfici che si trovano nei solidi immobili, ci dovranno essere superfici in sé, che hanno esistenza separata, sicché queste superfici e queste linee saranno diverse dalle superfici e dalle linee che si trovano nei solidi separati, perché le une esistono con i solidi matematici, mentre le altre sono anteriori. Ma a loro volta di queste superfici ci saranno linee, e prima di queste linee ci dovranno essere altre linee e punti, sempre in base al medesimo ragionamento; poi ci dovranno essere altri punti anteriori a questi ricavati dalle linee precedenti, punti prima dei quali non ci potranno più essere altri punti. 25 Ma allora nasce un'accumulazione assurda, perché, mentre i solidi che stanno al di là di quelli sensibili sono di un unico tipo, ci saranno oltre quelle sensibili tre tipi di superfici, quelle che sono al di là delle superfici sensibili, quelle che si trovano nei solidi matematici e quelle che sono 30

al di là di quelle dei solidi matematici; in quanto alle linee esse saranno di quattro tipi, i punti poi di cinque¹. Ma allora quali di questi enti costituiranno l'oggetto delle scienze matematiche? Infatti non si può neppure dire che esse studiano le superfici, le linee e i punti che si trovano nei
 35 solidi immobili, perché una scienza verte sempre intorno agli oggetti primi. Il medesimo ragionamento si può fare anche a proposito dei numeri. Al di là di ciascun tipo di punto ci saranno unità diverse, così come ci saranno al di là di ciascun tipo di cose esistenti, prima sensibili, poi

1. Aristotele obietta che la separazione delle grandezze geometriche porta a un accumulo assurdo di entità separate, perché il principio della separazione può esser fatto valere sulle stesse entità geometriche separate. Insieme con questo principio Aristotele fa valere il principio dell'anteriorità del semplice rispetto al composto. Combinando i due principi, si possono moltiplicare le entità geometriche per arrivare dalle grandezze sensibili alle grandezze geometriche pure, separate e isolate dalle grandezze che esse entrano a comporre. Il ragionamento di Aristotele procede a questo modo. Dai corpi, superfici, linee e punti sensibili, si separano solidi, superfici, linee e punti geometrici di I livello. I solidi geometrici di I livello contengono superfici, linee e punti di II livello; i solidi di I livello sono i solidi di per sé, perché non entrano a comporre entità più complesse, mentre le altre entità di II livello non sono le entità di per sé nella propria classe, perché entrano come elementi in entità più complesse. Per il principio dell'anteriorità del semplice, al di là delle superfici di II livello ci saranno superfici di III livello, che non saranno elementi immanenti in un complesso e saranno le superfici di per sé. Ma esse saranno composte di linee e punti di III livello, che non saranno di per sé. Ci saranno allora linee di IV livello che saranno le linee in sé e conterranno punti di IV livello, oltre i quali ci saranno punti di V livello, che saranno i punti in sé. Se si indicano i solidi con «SO», le superfici con «SU», le linee con «L» e i punti con «P», i solidi sensibili con «SOs», le superfici sensibili con «SUs» e così via, i solidi matematici con «SOM», le superfici matematiche con «SUM» e così via, le superfici che sono nei solidi matematici con «SUsom», le linee che sono nelle superfici che stanno nei solidi matematici con «Lsusom» e così via, si può rappresentare il ragionamento aristotelico con questo schema:



intellegibili, sicché esisteranno diversi generi di numeri matematici¹.

Inoltre come si possono risolvere i problemi che abbiamo già passato in rassegna nelle difficoltà²? Infatti gli oggetti sui quali verte l'astronomia dovrebbero essere al di là degli oggetti sensibili, allo stesso modo in cui lo sono gli oggetti intorno ai quali verte la geometria; ma come possono esserci un cielo con le sue parti oltre il cielo sensibile³ e in genere come può esistere separata qualsiasi altra cosa che abbia movimento? E le stesse considerazioni si possono ripetere per l'ottica e per l'armonica, perché in questo caso ci dovrebbero essere un suono e una vista al di là del suono e della vista sensibili e singoli; ma allora è chiaro che ciò dovrebbe avvenire anche per le altre sensazioni e per gli altri oggetti sensibili. Perché, infatti, ciò dovrebbe valere più in un caso che nell'altro? E, se le cose stanno così, ci saranno anche animali al di là dei singoli animali, se ci sono sensazioni al di là delle singole sensazioni.

Inoltre i matematici provano proposizioni universali al di là di queste sostanze⁴. Ci sarà dunque anche un'altra

1. Se si ammette lo schema di cui alla n. prec., poiché la scienza studia ciò che è primo, bisognerà dire che la matematica studia non gli enti geometrici del I livello, ma i solidi di I livello, le superfici di III, le linee di IV e i punti di V. La differenziazione di livelli si estende anche al campo della quantità numerica. Infatti se al punto corrisponde l'unità, poiché ci sono cinque tipi di punti, ci saranno cinque tipi di unità; ma ogni entità può essere considerata come un'unità, e le entità geometriche non sono omogenee, non solo perché c'è differenza tra le grandezze sensibili e le grandezze geometriche, ma anche perché le grandezze geometriche non sono omogenee al loro interno a causa dei livelli secondo i quali si dispongono.

2. III, 2, 997 b, 12-34.

3. Questo passo (1077 a, 3) è un po' duro, tanto che Jaeger ha supposto una lacuna in εἶναι δ' † οὐρανόν, che propone di colmare, in analogia a III, 2, 997 b, 16-17, con <οὐρανόν παρὰ τὸν αἰσθητὸν> o con <οὐρανόν ἄλλον ἀκίνητον παρὰ τόνδε τὸν> οὐρανόν. In analogia con il passo sopra cit. del libro III anche Ross (II, 413) sottintende παρὰ τὸν αἰσθητὸν οὐρανόν.

4. «Queste sostanze» sono le sostanze matematiche delle quali Aristotele ha parlato prendendo in considerazione l'ipotesi che esistano separate dalle cose sensibili. Una delle presunzioni in favore di questa ipotesi consiste nel fatto che le scienze matematiche devono avere oggetti omogenei diversi dalle sostanze sensibili perché considerano proprietà che appartengono a sostanze sensibili eterogenee. Ma questo stesso ragiona-

sostanza separata e intermedia rispetto alle idee e agli enti matematici intermedi, che non sarà né numero, né punto, né grandezza, né tempo. Se questo è impossibile, è chiaro che è impossibile che anche quelle entità siano separate dalle entità sensibili.

In generale si incappa in conseguenze contrarie alla
 15 verità e al modo solito di pensare, se si pone che gli enti matematici esistono alla maniera di nature separate. Infatti, così intesi, essi devono precedere le grandezze sensibili, mentre, secondo verità, sono posteriori a esse, perché la grandezza incompleta¹ è sì anteriore rispetto al processo di generazione, ma rispetto alla sostanza è posteriore, come
 20 ciò che non è animato rispetto a ciò che è animato.

E poi per quale ragione e quando mai le grandezze matematiche costituiranno un'unità? Infatti si capisce bene che i corpi di quaggiù costituiscano un'unità o per via dell'anima, o per opera di una parte dell'anima, o per qualche altra cosa, perché, se non intervengono queste cose, costituiscono una molteplicità, e si dissolvono. Ora, nel caso delle grandezze matematiche, che sono quantità

mento può essere ripetuto per le sostanze matematiche, perché esistono proposizioni matematiche che considerano proprietà generali appartenenti a sostanze matematiche (supposto che queste esistano) eterogenee, come numeri, grandezze geometriche ecc. Ps. Alessandro reca esempi come l'assioma «se da qualità uguali si sottraggono qualità uguali si ottengono qualità uguali» o teoremi della teoria delle proporzioni (729, 21-25). Anche Ross (II, 413) pensa che la teoria delle proporzioni sia un buon esempio di questa matematica generale.

1. Se le grandezze matematiche esistono come entità separate, devono essere anteriori alle grandezze sensibili, mentre in realtà esse sono posteriori alle cose sensibili aventi grandezza. Infatti le grandezze incomplete, cioè che sono solo grandezze e che sono prive delle altre proprietà, possono sussistere solo se esistono cose che hanno anche altre proprietà oltre quelle geometriche. Nel processo generativo le grandezze incomplete possono venire prima delle cose, perché il punto viene prima della linea, questa prima della superficie, la superficie prima del solido e il corpo solido prima del corpo animato, ma ciò che viene prima nel processo generativo viene dopo dal punto di vista della sostanza, perché esiste in vista della sostanza alla quale il processo generativo mette capo. Del resto sulla successione delle grandezze dal punto di vista del processo generativo Aristotele torna poco dopo, dove appunto osserva che le cose prima crescono nel senso della lunghezza, poi in quello della larghezza, infine in quello della profondità, e il corpo, che nasce per ultimo, è primo dal punto di vista della sostanza, ed è quello che può ricevere l'anima (cfr. sotto 24-29).

e sono divisibili, quale mai è la causa per cui sono qualcosa di unico e rimangono insieme?

Anche il modo in cui si generano le grandezze mette in luce le difficoltà della dottrina della loro esistenza separata. In primo luogo infatti le cose si generano nel senso della lunghezza, poi in quello della larghezza, alla fine in quello della profondità, e così raggiungono il loro compimento. Ora, se ciò che viene dopo nel senso della generazione è anteriore nel senso della sostanza, il corpo sarà anteriore alla superficie e alla linea. Anche per questo il corpo ha maggiori titoli a essere qualcosa di completo e di intero, in quanto diventa qualcosa di animato; mentre come una linea o una superficie potrebbero essere animate? Sarebbe pretendere qualcosa di superiore alle capacità dei nostri sensi.

Se poi il corpo è una sostanza, dal momento che in qualche modo è già qualche cosa di compiuto, come le linee potrebbero essere sostanza? Esse infatti non potrebbero esserlo né nel senso della specie e della forma, come per esempio potrebbe forse esserlo l'anima, né nel senso della materia, come il corpo. Non risulta che ci sia nulla che possa essere costituito da linee, da superfici e da punti, mentre, se queste cose fossero una sostanza materiale, ciò risulterebbe possibile. Ammettiamo pure che si tratti di cose che sono anteriori nel senso della definizione, ma non tutto ciò che è anteriore per definizione lo è anche nel senso della sostanza; sono anteriori nel senso della sostanza tutte le cose che sussistono separate da quelle rispetto alle quali sono anteriori, mentre sono anteriori nel senso della definizione quelle dalla cui definizione deriva la definizione delle cose rispetto alle quali sono anteriori. Ma queste due forme di priorità non stanno insieme. Se le proprietà, per esempio «mobile» o «bianco», non possono sussistere senza le sostanze, il bianco precede l'uomo bianco dal punto di vista della definizione, ma non della sostanza, perché non è possibile che essi esistano separatamente, ma solo sempre insieme al tutto (e per tutto intendo per esempio l'uomo, quello bianco), sicché è evidente che né ciò che si ricava per astrazione è primo, né

10 è ultimo ciò che si ricava per aggiunta; e per aggiunta di
uomo al bianco si ricava l'uomo bianco.

Che le entità matematiche non siano sostanze più dei
corpi, che, quanto all'essere, non siano anteriori alle cose
sensibili, ma che lo siano soltanto dal punto di vista della
definizione, che non possano esistere in qualche modo come
entità separate, si è detto a sufficienza. Ma, poiché non
15 possono essere esse stesse dentro alle cose sensibili, è
evidente che esse o non esistono affatto, o esistono, ma solo
in un certo senso, e, proprio per questo, non esistono in
senso assoluto; perché l'essere si dice in molti modi.