Storia e Fondamenti della Matematica
a.a. 2019/2020

Traccia d'esame – Novembre 2020 - 1

La misurazione: un semplice raccordo tra la teoria e la pratica della matematica, oppure uno spunto per un approfondimento storico-filosofico intorno alle nozioni di *quantità*? Alla luce del presente brano, tratto da una versione italiana de *I principi della matematica* di Bertrand Russell, discutere, con precisi e concreti riferimenti a questo ed altri testi originali di autori di varie epoche, i seguenti aspetti:

- la relazione tra *numero* e *grandezza*;
- l'evoluzione dell'approccio alla quantità rispetto alla visione pitagorica;
- la permanenza, attraverso i secoli, di elementi tipicamente euclidei;
- *divisibilità, continuità* ed *infinito* come criteri di classificazione ed origini di paradossi.

I NUMERI IN QUANTO ESPRIMENTI LE GRANDEZZE: LA MISURAZIONE

164 È UNA delle ammissioni più comuni tra le persone istruite che due grandezze dello stesso genere debbano essere numericamente comparabili. Molti sono disposti a dire di essere in un certo momento il trenta per cento più sani o più felici di quanto fossero prima, senza nemmeno sospettare che frasi siffatte sono destituite di ogni significato. Lo scopo del presente capitolo è quello di spiegare che cosa si intende dire con misurazione, quali siano le classi di grandezze a cui essa si applica, e il modo in cui ciò avvenga.

Dicesi misurazione di grandezze, nel senso più generale, qualsiasi metodo con cui si stabilisca una corrispondenza univoca e reciproca tra tutte o tra alcune grandezze di un determinato genere e tutti o alcuni numeri, interi, razionali o reali, secondo il caso. (Parrebbe di dover includere anche i numeri complessi; ma ciò che può essere misurato *soltanto* dai numeri complessi è sempre in realtà un aggregato di grandezze di generi diversi, non una grandezza singola.) In questo senso generale, la misurazione richiede una relazione uno-uno tra i numeri e le grandezze in questione; relazione che può essere diretta o indiretta, importante o banale, secondo le circostanze. La misurazione può, in questo senso, applicarsi a moltissime classi di grandezze; a due grandi classi, le distanze e le divisibilità, essa si applica, come vedremo, in un senso importante e più intimo.

Sulla misurazione nel senso più generale, vi è ben poco da dire. Dato che i numeri formano una serie, e dato che anche ogni specie di grandezza forma una serie, sarà desiderabile che l'ordine delle grandezze misurate corrisponda all'ordine dei numeri, cioè che tutte le relazioni di *tra* siano le stesse per le grandezze e per le loro misure. Ovunque esista uno zero, è bene che esso sia misurato dal numero zero. Queste ed altre sono le condizioni, cui una misura dovrà possibilmente soddisfare; esse però hanno più un'importanza pratica che teoretica.

165 Esistono due concezioni metafisiche generali, accettando l'una o l'altra delle quali se ne ricaverebbe che *tutte* le grandezze sono teoreticamente suscettibili di misurazione nel senso suddetto. La prima di esse è la teoria secondo cui tutti gli eventi o sono eventi nella serie causale dinamica oppure sono in correlazione con essi. Rispetto alle cosiddette qualità secondarie, la scienza fisica ha influito fino a tal punto sulla concezione ora riferita, che essa ha fornito di misure spaziali, e quindi numeriche, la maggior parte delle cosiddette quantità intensive che compaiono nello spazio. Rispetto alle quantità mentali la teoria in questione è quella del parallelismo psicofisico. Qui il movimento correlato a qualunque quantità psichica offre sempre teoreticamente un mezzo per misurare tale quantità. L'altra concezione metafisica, che conduce alla misurabilità universale, è quella offerta dalle « Anticipazioni della Percezione » di Kant[1], ed è precisamente la concezione che, tra le grandezze intensive, un qualsiasi accrescimento sia sempre accompagnato da un accrescimento di realtà. Realtà, in quest'occasione, sembra sinonimo di esistenza; perciò la teoria può venire enunciata così: l'esistenza è un tipo di grandezza intensiva tale, che, quando esiste una grandezza maggiore, ne abbiamo sempre di più che quando esiste una grandezza minore. (Sembra improbabile che questa sia esattamente la teoria di Kant; ma essa è tuttavia per lo meno un'opinione sostenibile.) Stando a questa teoria, dato che due casi della stessa grandezza (cioè due quantità uguali) dovrebbero avere più esistenza di uno solo di essi, ne segue che, se si potesse trovare un'unica grandezza della stessa specie formata dalle due quantità prese insieme, allora tale grandezza potrebbe venir chiamata doppia di ognuna delle quantità uguali anzidette. In questo modo tutte le grandezze intensive diventerebbero teoreticamente suscettibili di misurazione. Sarebbe assurdo sostenere che questo metodo abbia qualche importanza pratica; esso potrebbe tuttavia contribuire a rendere evidente il significato dell'espressione *doppiamente felice*. Esso ci offre un senso, in cui poter dire che un bambino trae altrettanto piacere da un pezzo di cioccolato quanto da due mentine; e sulla base di tali giudizi si potrebbe teoreticamente fondare il calcolo edonistico.

Dobbiamo riferire un'altra osservazione generale di una certa importanza. Se si sostenesse che tutte le serie di grandezze sono, o continue nel senso di Cantor, o simili alle serie che possono venir tratte dalle serie continue, allora risulterebbe teoreticamente possibile mettere in relazione un genere qualunque di grandezza con tutti i numeri reali o con parte di essi, in modo da far corrispondere lo zero delle grandezze considerate allo zero dei numeri, e le grandezze maggiori ai numeri maggiori. Qualora invece una qualunque serie di grandezze, senza essere continua, contenesse delle serie continue, essa risulterebbe rigorosamente e teoreticamente non suscettibile di misurazione per mezzo dei numeri reali [2].

166 Uscendo da queste generalità abbastanza vaghe, esaminiamo il senso più usuale e concreto della misurazione. Ciò di cui abbisogniamo è un senso, nel quale si possa dire che una grandezza è doppia di un'altra. Negli esempi suddetti questo senso veniva procurato o dalla correlazione con le grandezze spazio-temporali, o dalla correlazione con l'esistenza. Ciò

presupponeva che per questi due ultimi casi la frase anzidetta avesse già un significato. La misurazione richiede pertanto che, in taluni casi, esista un significato intrinseco per la proposizione « questa grandezza è doppia di quella ». (Apparirà in séguito in quale senso il significato sia intrinseco.) Orbene, finché le quantità sono considerate inerentemente divisibili, esiste certo un significato perfettamente ovvio di una proposizione come: una grandezza A è doppia di B allorché A è la grandezza di due quantità prese insieme, ognuna di esse avente la grandezza B. (Bisognerebbe però osservare che dividere una grandezza in due parti uguali deve sempre risultare impossibile, dato che non esiste qualcosa che possa venir chiamato grandezze uguali.) Una tale interpretazione sarà sempre applicabile alle grandezze di divisibilità; avendo però ammesso altre grandezze, si deve trovare un'interpretazione differente (posto che ve ne sia una) per queste altre. Esaminiamo dapprima il caso delle divisibilità, e poi procediamo agli altri casi in cui la misurazione risulti intrinsecamente possibile.

167 La divisibilità di un tutto finito è immediatamente e inerentemente correlata col numero di parti semplici nel tutto. In questo caso, benché le grandezze siano anche ora non suscettibili di una addizione della specie richiesta, le quantità possono essere addizionate nel modo spiegato nella parte seconda. L'addizione di due grandezze di divisibilità produce semplicemente due grandezze, non una nuova grandezza. L'addizione di due quantità di divisibilità, cioè di due tutti, produce invece effettivamente un nuovo tutto singolo, purché l'addizione sia del tipo che risulta dall'addizione logica, considerando le classi come i tutti formati dai loro termini. Esiste pertanto un significato in cui è lecito dire che una grandezza di divisibilità è doppia di un'altra, allorché ci si riferisce a un tutto contenente il doppio di parti. Nel caso però dei tutti infiniti, la questione non è affatto così ovvia. Qui il numero delle parti semplici (nei soli sensi del numero infinito che si siano finora scoperti) può essere uguale senza che vi sia eguaglianza nella grandezza di divisibilità. Qui è necessario un metodo che non retroceda fino alle parti semplici. Abbiamo, nello spazio effettivo, dei giudizi immediati di uguaglianza per due tutti infiniti. In questi casi, possiamo considerare la somma di n tutti uguali come n volte ognuno di essi; l'addizione dei tutti non richiede infatti che essi siano finiti. In tal modo diventa possibile la comparazione numerica di alcune coppie di tutti. Con i metodi usuali ben noti, con la suddivisione continua e il metodo dei limiti, il risultato ora detto viene esteso a tutte le coppie di tutti, che ammettono confronti immediati. Nulla si potrebbe compiere senza questi confronti immediati, indispensabili tanto logicamente, quanto psicologicamente [3]: noi ci riduciamo sempre, come ultima risorsa, al giudizio immediato che il nostro piede non ha mutato molto la propria lunghezza durante la misurazione, e questo giudizio antecede i risultati delle scienze fisiche circa il *quantum* di cui i corpi cambiano effettivamente misura. Allorché invece il confronto immediato è psicologicamente impossibile, noi possiamo sostituire ad esso teoreticamente una varietà logica di misurazione; questa, però, non ci fornisce una proprietà del tutto che è divisibile, ma una proprietà di qualche relazione o classe di relazioni più o meno analoghe a quelle che sono valide tra i punti nello spazio.

Che la divisibilità nel senso richiesto per le aree e i volumi non sia una proprietà di un tutto, risulta dal fatto (che sarà confermato nella parte quarta) che tra i punti di uno spazio esistono sempre relazioni capaci di generare uno spazio differente, Così, due insiemi di punti, i quali, rispetto a un dato gruppo di relazioni, formano aree uguali, formano invece aree disuguali rispetto a un altro gruppo di relazioni, o persino formano l'uno un'area e l'altro una linea o un volume. Ciò sarebbe impossibile se la divisibilità, nel senso che qui importa, fosse una proprietà intrinseca dei tutti. Ma questo argomento non può venire esaurientemente discusso finché non si giunga alla geometria metrica.

Quando le nostre grandezze sono delle divisibilità, non soltanto possiamo misurarle con i numeri, ma la differenza di due numeri che le misurano misurerà, con certe limitazioni, la grandezza della differenza (nel senso di dissimilarità) esistente tra tali divisibilità. Fissata una delle grandezze, la sua differenza dall'altra cresce al crescere della differenza dei numeri che le misurano; perché questa differenza dipende dalla differenza nel numero delle parti. Io non credo però che si possa dimostrare in generale che, se A, B, C, D sono i numeri che misurano quattro grandezze, ed $A-B = C-D$, allora le differenze delle grandezze siano uguali. Parrebbe, per esempio, che la differenza tra un pollice e due pollici sia maggiore della differenza tra mille e un pollice e milledue pollici. Questa osservazione non ha alcuna importanza nel caso presente, dato che non si ha mai bisogno delle differenze di divisibilità; nel caso però delle distanze, ciò ha una singolare relazione con la geometria. Ma è teoreticamente importante osservare che, se la divisibilità fosse davvero una grandezza, come sembra richiedere l'eguaglianza delle aree e dei volumi, non vi sarebbe a rigore alcun motivo per dire che la divisibilità di una somma di due unità sia doppia di quella di una unità. In effetti, questa proposizione non può venire ammessa in senso rigoroso, in quanto nessuna grandezza è una somma di parti, e nessuna grandezza è perciò il doppio di un'altra. Noi possiamo voler dire soltanto questo: la somma di due unità contiene il doppio di parti: e questo è un giudizio aritmetico, non quantitativo, ed è adeguato solo nel caso in cui il numero di parti sia finito, poiché negli altri casi il doppio di un numero è in generale uguale ad esso. Anche la misurazione della divisibilità mediante i numeri contiene dunque un elemento convenzionale, e troveremo che questo elemento è ancora più pronunciato nel caso delle distanze.

168 Nel caso anzidetto noi avevamo ancora l'addizione in uno dei suoi due sensi fondamentali, cioè la combinazione di vari tutti per formare un nuovo tutto. Ma in altri casi di grandezza noi non abbiamo nulla di simile. La somma di due piaceri non è un nuovo piacere, ma è semplicemente due piaceri. Anche la somma di due distanze non è propriamente una distanza. In questo caso però abbiamo un'estensione dell'idea di addizione. Un'estensione siffatta ha sempre da essere possibile quando la misurazione deve effettuarsi nel senso più naturale e limitato che stiamo ora discutendo. Spiegherò prima questa addizione generalizzata in termini astratti, e poi illustrerò la sua applicazione alle distanze.

Accade talvolta che due quantità, non suscettibili di vera addizione, posseggano tra loro una relazione, che ha una corrispondenza uno-uno con una quantità del medesimo genere di quelle tra cui essa relazione sussiste. Se *a, b, c*, sono siffatte quantità, noi abbiamo, nel caso supposto, alcune proposizioni *a B c* nelle quali *B* è una relazione che determina univocamente ed è univocamente determinata da qualche quantità *b* dello stesso genere di *a* e *c*. Così, per esempio, due rapporti hanno tra loro una relazione, che noi possiamo chiamare loro differenza, la quale è essa stessa completamente determinata da un altro rapporto, e precisamente dalla differenza, nel senso aritmetico, dei due rapporti dati. Se α, β, γ, sono termini di una serie in cui esiste la distanza, le distanze $\alpha\,\beta$, $\alpha\,\gamma$, hanno una relazione che è misurata dalla distanza $\beta\,\gamma$ (pur non essendo identica ad essa). In tutti questi casi possiamo, con un'estensione dell'addizione, porre $a + b = c$ in luogo di *a B c*. Ogni volta che un insieme di quantità ha relazioni di questo genere, se inoltre *a B c* implica *b A c*, cosicché risulti $a + b = b + a$, noi potremo procedere come se avessimo un'addizione ordinaria, e in conseguenza potremo introdurre la misurazione numerica.

Il concetto di distanza sarà discusso esaurientemente nella parte quarta, in rapporto con l'ordine: per ora mi importa soltanto dimostrare come due distanze diventino misurabili. La parola distanza sarà usata per indicare un concetto assai più generale di quello di distanza nello spazio. Intenderò come un genere di distanza, una serie di relazioni quantitative asimmetriche, di cui una e una soltanto sia valida tra una coppia qualunque di termini di una classe data; questi termini sono tali che, se esiste una relazione del genere considerato tra *a* e *b* e ne esiste pure tra *b* e *c,* allora ve ne sarà una dello stesso genere tra *a* e *c*; la relazione tra *a* e *c* essendo il prodotto relativo di quella tra *a* e *b* per quella tra *b* e *c*. Questo prodotto deve essere commutativo, cioè indipendente dall'ordine dei suoi fattori. E infine, se la distanza *a b* è maggiore della distanza *a c*, allora, essendo *d* un qualunque altro elemento della classe, *d b* sarà maggiore di *d c*. Pur essendo, dunque, le distanze delle relazioni, ed essendo pertanto indivisibili e incapaci di vera addizione, esiste tuttavia una convenzione semplice e naturale per cui tali distanze diventano numericamente misurabili.

La convenzione è la seguente. Stabiliremo che: se le distanze $a_0\,a_1$, $a_1\,a_2$, . . . , $a_{n-1}\,a_n$ sono tutte eguali e nello stesso verso, $a_0\,a_n$ deve dirsi *n* volte ognuna delle distanze $a_0\,a_1$ ecc., cioè deve essere misurata da un numero *n* volte maggiore. Questa venne generalmente considerata non come una convenzione, ma come una verità ovvia; tuttavia, poiché le distanze sono indivisibili, nessuna distanza è in realtà una somma di altre distanze, e la misurazione numerica deve essere in parte convenzionale. Con questa convenzione, i numeri corrispondenti alle distanze, quando tali numeri esistano, diventano definiti, a meno di un fattore comune dipendente dalla scelta di un'unità. Con questo metodo vengono pure assegnati dei numeri agli elementi della classe tra cui sono valide le distanze; questi numeri avranno, oltre al fattore arbitrario, una costante additiva arbitraria che dipende dalla scelta dell'origine. Questo metodo, che è suscettibile di una generalizzazione ancora maggiore, verrà più ampiamente spiegato nella parte quarta. Allo scopo di dimostrare che si possono assegnare numeri a *tutte* le distanze del nostro genere e a *tutti* i termini del nostro insieme, sono necessari altri due assiomi: l'assioma di Archimede, e quello che si può chiamare assioma di linearità [4].

169 L'importanza della misurazione numerica della distanza, almeno in quanto applicata allo spazio ed al tempo, dipende in parte da un fatto ulteriore, che la mette in relazione con la misurazione numerica della divisibilità. In tutte le serie, tra due termini qualsiasi la cui distanza non sia la minima, esistono termini intermedi. Questi termini sono determinati, quando siano specificati i due estremi. I termini intermedi si possono chiamare il *tratto* da *a* ad a_n [5]. Il tutto composto da questi termini è una quantità, e possiede una divisibilità misurata dal numero dei termini, purché il loro numero sia finito. Se la serie è tale che le distanze dei termini consecutivi siano tutte uguali, allora; posto che vi siano $n - 1$ termini tra a_0 e a_n, la misura della distanza fra questi due termini sarà proporzionale ad *n*. Se, pertanto, includiamo nel tratto uno dei termini estremi, ma non l'altro, la misura del tratto e la distanza saranno proporzionali, e tratti uguali corrisponderanno a distanze uguali. Il numero dei termini nel tratto misurerà, dunque, tanto la distanza dei termini estremi, quanto l'ammontare di divisibilità del tratto completo. Quando il tratto contiene un numero infinito di termini, noi valutiamo i tratti uguali nel modo sopra spiegato. Diventa quindi un assioma,

che può essere valido o no in un caso dato, che tratti uguali corrispondano a distanze uguali. In questo caso, le coordinate misurano due grandezze completamente distinte, che vengono sempre confuse a causa della loro misura comune.

170 L'analisi, che abbiamo ora compiuta, spiega un interessante problema che tormentò la maggior parte di quanti hanno cercato di filosofare sulla geometria. Partendo dalle grandezze a una dimensione connesse con la linea retta, la maggior parte delle teorie può essere divisa in due classi: quelle adatte alle aree e ai volumi, e quelle adatte agli angoli tra rette o fra piani. Le aree ed i volumi sono radicalmente differenti dagli angoli, e generalmente sono trascurate nelle filosofie che si attengono al punto di vista relazionale dello spazio o partono dalla geometria proiettiva. La ragione di ciò è assai semplice. Se, come usualmente si suppone, esiste sulla retta una relazione di distanza, noi abbiamo due grandezze filosoficamente distinte, ma praticamente congiunte, e precisamente la distanza e la divisibilità del tratto. La prima è simile agli angoli; la seconda, alle aree e ai volumi. Gli angoli invero possono anche essere considerati come distanze fra termini in una serie, e precisamente fra rette per un punto o fra piani per una retta. Le aree e i volumi, al contrario, sono somme, o grandezze di divisibilità. A causa della confusione tra i due generi di grandezze connessi con la retta, o gli angoli, oppure le aree e i volumi, risultano comunemente incompatibili con la filosofia che è stata inventata per riuscire idonea alla retta. Questa incompatibilità è immediatamente spiegata e superata mediante l'analisi qui compiuta [6].

171 Vediamo così, che due ampie classi di grandezze, le divisibilità e le distanze, possono venir riportate alla misura. Queste due classi comprendono praticamente quegli enti che di solito si chiamano grandezze estensive, e sarà conveniente continuare a lasciar loro questo nome. Io estenderò questo nome sì da applicarlo a tutte le distanze e le divisibilità, abbiano o no relazioni con lo spazio e col tempo. Non si deve però supporre che la parola *estensivo* indichi qui, come essa fa di solito, che le grandezze con essa designate siano divisibili. Abbiamo già visto che nessuna grandezza è divisibile. Le *quantità* risultano divisibili in altre quantità soltanto nell'unico caso dei tutti che siano quantità di divisibilità. Le quantità invece che sono distanze, sebbene vengano da me chiamate estensive, non sono divisibili in distanze più piccole; ma esse permettono l'importante specie di addizione sopra spiegata, specie che in futuro chiamerò addizione *relazionale* [7].

Tutte le altre grandezze e quantità si possono propriamente chiamare *intensive*. Rispetto ad esse la misurazione numerica è impossibile, salvo che mediante qualche relazione causale, o mediante qualche relazione più o meno indiretta come quella spiegata all'inizio del presente capitolo. Quei matematici che si sono abituati a dare un'importanza speciale ed esclusiva ai numeri, penseranno che non possa significare molto una definitezza riferentesi a grandezze non suscettibili di misurazione. Tuttavia non è affatto così. I giudizi immediati di uguaglianza, su cui (come abbiamo visto) si basano tutte le misurazioni, sono possibili anche quando venga meno la misurazione, come lo sono pure i giudizi immediati di maggiore e minore. Il dubbio sorge soltanto quando la differenza è piccola; e tutto ciò che può fare la misurazione a questo riguardo, è di diminuire il margine del dubbio; risultato puramente psicologico e di nessuna importanza filosofica. Si possono dunque sistemare, in una scala di grandezze maggiori e minori, quantità che non sono suscetbili di misurazione numerica; e questo è l'unico risultato strettamente quantitativo della stessa misurazione numerica. Noi possiamo sapere che una grandezza è maggiore di un'altra, e che una terza è intermedia tra le due; dato che le differenze di grandezze sono sempre grandezze, vi è pure sempre (per lo meno teoreticamente) una risposta alla domanda se la differenza di una coppia di grandezze sia maggiore, minore, o uguale alla differenza di un'altra coppia dello stesso genere. E tali proposizioni, benché possano apparire approssimative ai matematici, sono proprio altrettanto precise e definite quanto le proposizioni dell'aritmetica. Pur senza la misurazione numerica, le relazioni quantitative di grandezze hanno perciò, tutte, la definitezza di cui esse sono capaci; non si aggiunge nulla, dal punto di vista teoretico, mediante l'assegnazione di numeri correlati. Tutto l'argomento della misurazione delle quantità è, in effetti, un argomento di importanza più pratica che teoretica. Ciò che in esso risulta teoreticamente più importante è assorbito dalla questione più vasta della correlazione di serie, che ci occuperà a lungo in séguito. La ragione principale per cui io ho trattato l'argomento con tanta ampiezza proviene dalla sua importanza tradizionale; se non fosse per essa, avrei potuto trattarlo molto più sommariamente.

---

1 *Reine Vernunft,* ed. Hart. (1867), pag. 160. La stesura della prima edizione illustra meglio che quella della seconda la dottrina a cui alludo. Vedi per esempio l'edizione Erdmann, p. 161.

2 Vedi parte quinta, cap. XXXIII e segg.

3 Cfr. Meinong, *op. cit.*, pp. 63-4.

4 Vedi parte quarta, cap. XXXI. Questo assioma asserisce che una grandezza può essere divisa in *n* parti uguali, e forma parte della definizione della grandezza lineare del Du Bois Reymond. Vedi il suo *Allgemeine Functionentheorie* (übingen, 1882), cap. I, § 16; anche

Bettazzi, *Teoria delle grandezze* (Pisa, 1890), p. 44. L'assioma di Archimede asserisce che, date due grandezze qualsiasi di una specie, qualche multiplo finito della minore supera la maggiore.

5 Chiamato *Strecke* dal Meinong, *op. cit.*, per esempio p. 22.

6 Nella parte sesta troveremo motivo di negare la distanza nella maggior parte degli spazi. Vi resta però ancora una distinzione fra i tratti, costituiti dai termini di qualche serie, e le quantità come le aree e i volumi, ove i termini non formano in nessun senso semplice una serie unidimensionale.

7 Da non confondersi con l'addizione *relativa* dell'algebra dei numeri relativi. Essa è connessa piuttosto con la moltiplicazione relativa.