Storia e Fondamenti della Matematica
a.a. 2019/2020

Traccia d'esame – Settembre 2020 - 4

La matematica, specialmente la geometria, si presta ad essere applicata praticamente nelle realizzazioni tecniche. A queste si può ricondurre un discorso scientifico che, fondato su solidi principi e su deduzioni rigorose, punti a smontare errate convinzioni. Affrontare l'argomento attraverso il brano galileiano qui allegato, mettendone in evidenza gli elementi che lo ricollegano ad altre fonti storiche, ed in particolare

- la funzione didattica della struttura dialogica;
- l'impianto dimostrativo;
- il ruolo della proporzione;
- il confronto tra grandezze geometriche.

DISCORSI
E
DIMOSTRAZIONI
MATEMATICHE,

intorno à due nuoue ſcienze

Attenenti alla

MECANICA & i MOVIMENTI LOCALI;

del Signor

GALILEO GALILEI LINCEO,

Filoſofo e Matematico primario del Sereniſſimo Grand Duca di Toſcana.

Con vna Appendice del centro di grauità d'alcuni Solidi.

IN LEIDA,

Appreſſo gli Elſevirii. M. D. C. XXXVIII.

Frontespizio dei *Discorsi intorno a due nuove scienze*

Salv. Che io vi sia per far vedere l'invisibile, né io lo saprei fare, né credo voi lo ricerchiate; ma per quanto da i nostri sensi può esser compreso, già che voi avete nominato l'oro, non veggiam noi farsi immensa distrazzione delle sue parti? Non so se vi sia occorso di veder le maniere che tengono gli artefici in condur l'oro tirato, il quale non è veramente oro se non in superficie, ma la materia interna è argento: ed il modo del condurlo è tale. Pigliano un cilindro, o volete dire una verga, d'argento, lunga circa mezzo braccio e grossa per tre o quattro volte il dito pollice, e questa indorano con foglie d'oro battuto, che sapete esser così sottile che quasi va vagando per l'aria, e di tali foglie ne soprappongono otto o dieci, e non più. Dorato che è, cominciano a tirarlo con forza immensa, facendolo passare per fori della filiera; e tornando a farlo ripassare molte e molte volte successivamente per fori più angusti, dopo molte e molte ripassate lo riducono alla sottigliezza d'un capello di donna, se non maggiore: e tuttavia resta dorato in superficie. Lascio ora considerare a voi quale sia la sottigliezza e distrazzione alla quale si è ridotta la sustanza dell'oro.

Simp. Io non veggo che da questa operazione venga in consequenza un assottigliamento della materia dell'oro da farne quelle maraviglie che voi vorreste: prima, perché già la prima doratura fu di dieci foglie d'oro, che vengono a far notabile grossezza; secondariamente, se ben, nel tirare e assottigliar quell'argento, cresce in lunghezza, scema però anco tanto in grossezza, che, compensando l'una dimensione con l'altra, la superficie non si agumenta tanto, che per vestir l'argento di oro, bisogni ridurlo a sottigliezza maggiore di quella delle prime foglie.

Salv. V'ingannate d'assai, Sig. Simplicio, perché l'accrescimento della superficie è sudduplo dell'allungamento, come io potrei geometricamente dimostrarvi.

Sagr. Io, e per me e per il Sig. Simplicio, vi pregherei a recarci tal dimostrazione, se però credete che da noi possa esser capita.

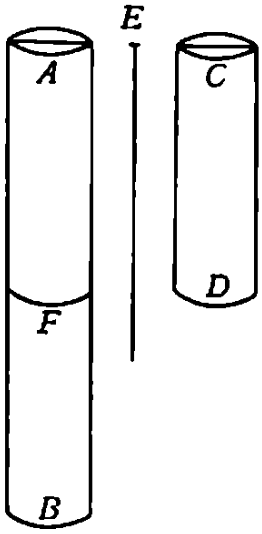
Salv. Vedrò se così improvisamente mi torna a memoria. Già è manifesto, che quel primo grosso cilindro d'argento ed il filo lunghissimo tirato sono due cilindri eguali, essendo l'istesso argento; tal che s'io mostrerò qual proporzione abbiano tra di loro le superficie de i cilindri eguali, averemo l'intento. Dico per tanto che:

> Le superficie de i cilindri eguali, trattone le basi, son tra di loro in sudduplicata proporzione delle loro lunghezze [19].

Siano due cilindri eguali, l'altezze de i quali *A B*, *C D*, e sia la linea *E* media proporzionale tra esse: dico, la superficie del cilindro *A B*, trattone le basi, alla superficie del cilindro *C D*, trattone parimente le basi, aver la medesima proporzione che la linea *A B* alla linea *E*, che è sudduplа dalla proporzione di *A B* a *C D*. Taglisi la parte del cilindro *A B* in *F*, e sia l'altezza *A F* eguale alla *C D*: e perché le basi de' cilindri eguali rispondon contrariamente

[19] Rapporto fra le radici di due grandezze.

alle loro altezze, il cerchio base del cilindro *C D* al cerchio base del cilindro *A B* sarà come l'altezza *B A* alla *D C*; e perché i cerchi son tra loro come i quadrati de i diametri, aranno detti quadrati la medesima proporzione che la *B A* alla *C D*; ma come *B A* a *C D*, così il quadrato *B A* al quadrato della *E*: son dunque tali quattro quadrati proporzionali; e però i lor lati ancora saranno proporzionali, e come la linea *A B* alla *E*, così il diametro del cerchio *C* al diametro del cerchio *A*. Ma come i diametri, così sono le circonferenze, e come le circonferenze così sono ancora le superficie de' cilindri egualmente alti: adunque come la linea *A B* alla *E*, così la superficie del cilindro *C D* alla superficie del cilindro *A F*. Perché dunque l'altezza *A F* alla *A B* sta come la superficie *A F* alla superficie *A B*; e come l'altezza *A B* alla linea *E*, così la superficie *C D* alla *A F*: sarà, per la perturbata [20], come l'altezza *A F* alla *E*, così la superficie *C D* alla superficie *A B*: e convertendo, come la superficie del cilindro *A B* alla superficie del cilindro *C D*, così la linea *E* alla *A F*, cioè alla *C D*, o vero la *A B* alla *E*, che è proporzione suddupla della *A B* alla *C D*: che è quello che bisognava provare.



Ora, se noi applicheremo questo, che si è dimostrato, al nostro proposito, presupposto che quel cilindro d'argento, che fu dorato mentre non era più lungo di mezzo braccio e grosso tre o quattro volte più del dito pollice, assottigliato alla finezza d'un capello si sia allungato sino in venti mila braccia (che sarebbe anche più assai), troveremo, la sua superficie esser cresciuta dugento volte più di quello che era; ed in consequenza quelle foglie d'oro, che furon soprap-

[20] L'ordine perturbato (o *perturbata ratio*) si ha quando, date due serie di tre grandezze ciascuna, disposte in un certo ordine, la prima grandezza della prima serie sta alla seconda della medesima serie, come la seconda grandezza della seconda serie sta alla terza di tale serie; e viceversa, nella prima serie, la seconda grandezza sta alla terza come, nella seconda serie, la prima sta alla seconda.

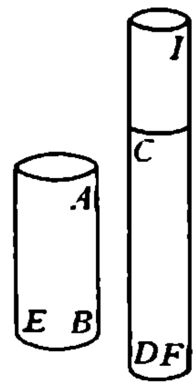
poste dieci in numero, distese in superficie dugento volte maggiore, ci assicurano, l'oro, che cuopre la superficie delle tante braccia di filo, restar non più grosso che la ventesima parte d'una foglia dell'ordinario oro battuto. Considerate ora voi qual sia la sua sottigliezza, e se è possibile concepirla fatta senza una immensa distrazzione di parti, e se questa vi pare una esperienza che tenda anche ad una composizione d'infiniti indivisibili nelle materie fisiche: se ben di ciò non mancano altri più gagliardi e concludenti rincontri.

Sagr. La dimostrazione mi par tanto bella, che quando non avesse forza di persuader quel primo intento per il quale è stata prodotta (che pur mi par che ve l'abbia grande), ad ogni modo benissimo si è impiegato questo breve tempo che per sentirla si è speso.

Salv. Già che veggo che gustate tanto di queste geometriche dimostrazioni, apportatrici di guadagni sicuri, vi dirò la compagna di questa, che sodisfà ad un quesito curioso assai. Nella passata aviamo quello che accaggia de i cilindri eguali, ma diversi di altezze o vero lunghezze: è ben sentire quello che avvenga a i cilindri eguali di superficie, ma diseguali d'altezze; intendendo sempre delle superficie sole che gli circondano intorno, cioè non comprendendo le due basi, superiore e inferiore. Dico dunque che:

> I cilindri retti, le superfici de i quali, trattone le basi, siano eguali, hanno fra di loro la medesima proporzione che le loro altezze contrariamente prese.

Siano eguali le superficie de i due cilindri *A E*, *C F*, ma l'altezza di questo *C D* maggiore dell'altezza dell'altro *A B*: dico, il cilindro *A E* al cilindro *C F* aver la medesima proporzione che l'altezza *C D* alla *A B*. Perché dunque la superficie *C F* è uguale alla superficie *A E*, sarà il cilindro *C F* minore dell'*A E*, perché se li fusse eguale, la sua superficie, per la passata proposizione, sarebbe maggiore della superficie *A E*, e molto più se il medesimo cilindro *C F* fusse maggiore dell'*A E*. Intendasi il cilindro *I D* eguale all'*A E*; adunque, per la precedente, la superficie del ci-



lindro *I D* alla superficie dell'*A E* starà come l'altezza *I F* alla media tra *I F*, *A B*. Ma essendo, per il dato, la superficie *A E* eguale alla *C F*, ed avendo la superficie *I D* alla *C F* la medesima proporzione che l'altezza *I F* alla *C D*, adunque la *C D* è media tra le *I F*, *A B*; in oltre, essendo il cilindro *I D* eguale al cilindro *A E*, aranno amendue la medesima proporzione al cilindro *C F*: ma l'*I D* al *C F* sta come l'altezza *I F* alla *C D*: adunque il cilindro *A E* al cilindro *C F* arà la medesima proporzione che la linea *I F* alla *C D*, cioè che la *C D* alla *A B*, che è l'intento.

Di qui s'intende la ragione d'un accidente che non senza maraviglia vien sentito dal popolo; ed è, come possa essere che il medesimo pezzo di tela più lungo per un verso che per l'altro, se se ne facesse un sacco da tenervi dentro del grano, come si costuma fare con un fondo di tavola, terrà più servendoci per l'altezza del sacco della minor misura della tela e con l'altra circondando la tavola del fondo, che facendo per l'opposito: come se, v. g., la tela per un verso fusse sei braccia e per l'altro dodici, più terrà quando con la lunghezza di dodici si circondi la tavola del fondo, restando il sacco alto braccia sei, che se si circondasse un fondo di sei braccia, avendone dodici per altezza. Ora, da quello che si è dimostrato, alla generica notizia del capir più per quel verso che per questo, si aggiugne la specifica e particolare scienza del quanto ei contenga più; che è, che tanto più terrà quanto sarà più basso, e tanto meno quanto più alto: e così, nella misure assegnate essendo la tela il doppio più lunga che larga, cucita per la lunghezza terrà la metà manco che per l'altro verso; e parimente avendo una stuoia, per fare una bugnola, lunga venticinque braccia e larga, v. g., sette, piegata per lo lungo terrà solamente sette misure di quelle che per l'altro verso ne terrebbe venticinque.

Sagr. E così con nostro gusto particolare andiamo continuamente acquistando nuove cognizioni curiose e non ignude di utilità. Ma nel proposito toccato adesso, veramente non credo che tra quelli che mancano di qualche cognizione di geometria se ne trovassero quattro per cento che non restassero a prima giunta ingannati, che quei corpi che da superficie eguali son contenuti, non fussero ancora in tutto eguali; sì come nell'istesso errore incorrono parlando delle superficie, che per determinar, come spesse volte accade, delle grandezze di diverse città, intera cognizione gli par d'averne qualunque volta sanno la quantità de i recinti di quelle, ignorando che può essere un recinto eguale a un altro, e la piazza contenuta da questo assai maggiore della piazza di quello: il che accade non solamente tra le superficie irregolari, ma tra le regolari, delle quali quelle di più lati son sempre più capaci di quelle di manco lati, sì che in ultimo il cerchio, come poligono di lati infiniti, è capacissimo sopra tutti gli altri poligoni di egual circuito; di che mi ricordo averne con gusto particolare veduta la dimostrazione studiando la Sfera del Sacrobosco con un dottissimo commentario sopra [21].

Salv. È verissimo: ed avendo io ancora incontrato cotesto luogo, mi dette occasione di ritrovare, come con una sola e breve dimostrazione si concluda, il cerchio esser maggiore di tutte le figure regolari isoperimetre; e, dell'altre, quelle di più lati, maggiori di quelle di manco.

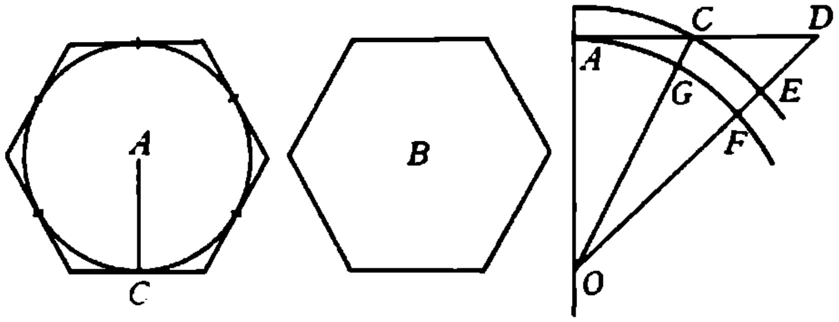
Sagr. Ed io, che sento tanto diletto in certe proposizioni e dimostrazioni scelte e non triviali, importunandovi vi prego che me ne facciate partecipe.

Salv. In brevi parole vi spedisco, dimostrando il seguente teorema, cioè:

> Il cerchio è medio proporzionale tra qualsivoglino due poligoni regolari tra di loro simili, de i quali uno gli sia circoscritto e l'altro gli sia isoperimetra. In oltre, essendo egli minore di tutti i circoscritti, all'incontro massimo di tutti gl'isoperimetri. De i medesimi poi circoscritti, quelli che hanno più angoli son minori di quelli che ne hanno manco; ma all'incontro, de gl'isoperimetri quelli di più angoli son maggiori.

[21] Cfr. *Dialogo sopra i due massimi sistemi*, p. 323, n. 86.

Delli due poligoni simili *A*, *B* sia l'*A* circoscritto al cerchio *A*, e l'altro *B* ad esso cerchio sia isoperimetro: dico, il cerchio esser medio proporzionale tra essi. Imperò che (tirato il semidiametro *A C*), essendo il cerchio eguale a quel triangolo rettangolo, de i lati del quale che sono intorno all'angolo retto, uno sia eguale al semidiametro *A C* e l'altro alla circonferenza; e similmente essendo il poligono *A* eguale al triangolo rettangolo, che intorno all'angolo retto ha uno



de i lati eguali alla medesima retta *A C*, e l'altro al perimetro del medesimo poligono; è manifesto, il circoscritto poligono aver al cerchio la medesima proporzione che ha il suo perimetro alla circonferenza di esso cerchio, cioè al perimetro del poligono *B*, che alla circonferenza detta si pone eguale: ma il poligono *A* al *B* ha doppia proporzione che 'l suo perimetro al perimetro di *B* (essendo figure simili): adunque il cerchio *A* è medio proporzionale tra i due poligoni *A*, *B*. Ed essendo il poligono *A* maggior del cerchio *A*, è manifesto, esso cerchio *A* esser maggiore del poligono *B*, suo isoperimetro, ed in consequenza massimo di tutti i poligoni regolari suoi isoperimetri.

Quanto all'altra parte, cioè di provare che de i poligoni circoscritti al medesimo cerchio, quello di manco lati sia maggior di quello di più lati; ma che all'incontro, de i poligoni isoperimetri quello di più lati sia maggiore di quello di manco lati; dimostreremo così. Nel cerchio, il cui centro *O*, semidiametro *O A*, sia la tangente *A D*, ed in essa pongasi, per esempio, *A D* esser la metà del lato del pentagono circoscritto, ed *A C* metà del lato dell'ettagono, e tirinsi le rette *O G C*, *O F D*, e, centro *O*, intervallo *O C*, descrivasi l'arco *E C I*. E perché il triangolo *D O C* è maggiore del settore *E O C*, e 'l settore *C O I* maggiore del triangolo *C O A*, maggior proporzione arà il triangolo *D O C* al triangolo *C O A*, che 'l settore *E O C* al settore *C O I*, cioè che 'l settore *F O G* al settore *G O A*; e componendo e permutando, il triangolo *D O A* al settore *F O A* arà maggior proporzione che il triangolo *C O A* al settore *G O A*, e dieci triangoli *D O A* a dieci settori *F O A* aranno maggior proporzione che quattordici triangoli *C O A* a quattordici settori *G O A*, cioè il pentagono circoscritto arà maggior proporzione al cerchio che non gli ha l'ettagono; e però il pentagono sarà maggior dall'ottagono. Intendansi ora un ettagono ed un pentagono isoperimetri al medesimo cerchio: dico, l'ettagono esser maggior del pentagono. Imperò che, essendo l'istesso cerchio medio proporzionale tra 'l pentagono circoscritto e 'l pentagono suo isoperimetro, e parimente medio tra 'l circoscritto e l'isoperimetro ettagono; essendosi provato, il circoscritto pentagono esser maggiore del circoscritto ettagono; avrà esso pentagono maggior proporzione al cerchio che l'ettagono, cioè il cerchio arà maggior proporzione al suo isoperimetro pentagono che all'isoperimetro ettagono: adunque il pentagono è minore dell'isoperimetro ettagono: che si doveva dimostrare [22].

Sagr. Gentilissima dimostrazione e molto acuta [23]. Ma dove siamo trascorsi a ingolfarci nella geometria? mentre eramo su 'l considerare le difficoltà promosse dal Sig. Simplicio, che veramente son di gran considerazione; ed in particolare quella della condensazione mi par durissima.

[22] Galilei, che aveva conosciuto le *Collezioni matematiche* di Pappo, attraverso la traduzione del Commandino, riprende dal quinto libro di quest'opera le argomentazioni degli isoperimetri. Come si è visto nelle *Meccaniche*, le teorie di Pappo e degli altri matematici dell'antichità sono da lui utilizzate sempre in funzione di problemi di fisica.

[23] A questo punto Galilei aggiunse in margine ad un esemplare dell'edizione di Leida del 1638: «e che ritiene una quasi contradizion nel primo aspetto; poiché la cagione dell'esser il poligono di più lati maggior del suo isoperimetro di manco lati, proviene dall'esser il circonscritto di più lati minor del circonscritto di manco lati».