Il concetto di funzione

Una prima definizione di funzione si trova in un lavoro di **Leibniz** (1692): *"Funzione di una grandezza variabile x è una quantità y ottenuta componendo in un modo qualunque x con delle costanti".*
Questa definizione viene precisata successivamente da **Eulero** (1748): *"Una funzione di quantità variabili è un'espressione analitica composta in modo qualunque da quelle quantità e da numeri o quantità costanti".*
Per espressione analitica Eulero intende un'espressione ottenuta eseguendo operazioni algebriche (addizione, moltiplicazione,..., elevazione a potenza, estrazione di radice) o trascendenti (logaritmo, seno, ..., esponenziale).
Ricordiamo che le funzioni seno e coseno hanno la loro origine in antichissimi studi astronomici; nella matematica greca (V secolo a.C.) si ritrova lo studio delle relazioni tra le corde di un cerchio e gli angoli al centro; in **Euclide** si trovano proposizioni che possono essere interpretate come relazioni trigonometriche; Ipparco (180-125 a.C.) ideò la suddivisione della circonferenza in 360 parti e compilò la prima tavola trigonometrica; **Tolomeo** di Alessandria (I secolo d.C.) scrisse *"Sintassi matematica"* o *"**Almagesto**"*, l'opera più significativa della trigonometria antica; in India, nell'opera "*Siddhantas*" (Sistemi astronomici, III secolo d.C.), anziché studiare il rapporto fra corde del cerchio e angolo al centro, si studia *"la corrispondenza fra la metà della corda e la metà dell'angolo che sottende la corda",* dando così origine alla funzione "seno".
Regiomontano (1436-1476) con *"De triangulis omnimodis"* (1464) scrisse il primo trattato moderno di trigonometria con l'esposizione sistematica dei metodi per risolvere problemi relativi ai triangoli; il **Viète** (1540-1603) con *"Canon mathematicus"* (1579) compilò le prime tabelle complete delle funzioni trigonometriche. Di origine più recente è, invece, il logaritmo (**Neper**, 1614) di cui **Mercator** (1668) trovò lo sviluppo in **serie** di potenze:

$$log(x+1) = x - x^2/2 + x^3/3 - ....$$

Ritornando al concetto euleriano di funzione, osserviamo che non si avrebbe una funzione ponendo, ad esempio,
$y = 0$ se $x \leq 0$, e $y = x^2$ se $x > 0$.
Inoltre, le funzioni nel senso di Eulero sono necessariamente "continue, derivabili, ecc ...", anzi, addirittura, "localmente sviluppabili in serie di potenze".

La controversia fra **D'Alembert** ed Eulero (1750), circa il modo in cui intendere "l'arbitrarietà" delle funzioni ϑ_1, ϑ_2, che ricorrono nella formula di D'Alembert che fornisce la soluzione generale $y = \vartheta_1(x+t) + \vartheta_2(x-t)$ dell'equazione della corda vibrante

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = a \frac{d^2 y}{dt^2}$$

per $a = 1$, fa progredire il concetto di funzione.
D'Alembert riteneva che sia ϑ_1 sia ϑ_2 dovessero esprimersi analiticamente mediante x, t; Eulero, per comprendere fra le soluzioni anche quelle determinate da configurazioni iniziali della corda con punti angolosi (in corrispondenza della parte "pizzicata"), non richiede l'esistenza per ϑ_1, ϑ_2 di un'unica rappresentazione analitica in tutto l'intervallo e ammette che la "curva soluzione" possa essere composta da più pezzi di curva corrispondenti ciascuna ad una funzione esprimibile analiticamente, senza che l'intera curva corrisponda ad una funzione dello stesso tipo.
Eulero chiama curve continue quelle corrispondenti ad una sola funzione (analitica) della variabile e discontinue quelle ottenute per giustapposizione (affiancamento) di curve continue.

Nel 1755 lo stesso Eulero dà una definizione più generale di funzione (anche se in pratica si limita sempre alle funzioni analitiche): *"Se delle quantità dipendono da altre in modo che dalle mutazioni di queste dipendono anche le prime (cioè subiscono delle variazioni), esse si usano chiamare funzioni di queste. Questa denominazione è molto ampia e comprende in sé tutti i modi coi quali una quantità si può determinare per mezzo di altre".*
Il senso di questa definizione è precisato da **Condorcet** (1765), più noto come uomo politico che come matematico: *"Suppongo di avere un certo numero di quantità x, y,..., F e che, per ogni valore determinato di x, y, ... , F abbia uno o più valori determinati che corrispondono ad essi, io dico allora che F è una funzione di x, y, ... anche se non conosco né la maniera di esprimere F mediante x, y,... né la forma dell'equazione fra F, x, y,..."*
Con le ultime parole Condorcet sembra riferirsi alle funzioni implicite.
Nel 1787 l'Accademia di Pietroburgo bandì un premio sulla natura delle funzioni cui si perviene nell'integrazione di equazioni alle derivate parziali. Vinse il premio **L.F. Arbogast** (1759-1803) con un lavoro (1791) in cui fra l'altro dice:

“La legge di continuità consiste nel fatto che una quantità non può passare da uno stato all’altro senza passare attraverso tutti gli stati intermedi che sono soggetti alla stessa legge. Le funzioni algebriche sono considerate continue poiché i differenti valori di queste funzioni dipendono nella stessa maniera da quelli della variabile e, supponendo che la variabile cresca continuamente, la funzione subirà variazioni in modo corrispondente ma tuttavia non passerà da un valore ad un altro senza passare attraverso tutti i valori intermedi.
Quindi l’ordinata y di una curva algebrica, quando l’ascissa x varia, non può passare bruscamente da un valore ad un altro, non ci può essere un salto fra un’ordinata e un’altra che differisce da essa di una quantità prefissata, ma tutti i successivi valori di y devono esser collegati fra loro da una stessa legge... Questa continuità può essere vanificata in due modi.
1) La funzione può cambiare la sua forma, cioè la legge secondo cui la funzione dipende dalla variabile può cambiare del tutto. Una curva formata dall’unione di più curve differenti è di questo tipo.
Non è neppure necessario che la funzione y debba essere espressa da una equazione in un certo intervallo della variabile; essa può continuamente cambiare la sua forma e la linea che la rappresenta, al posto di essere l’unione di curve regolari, può essere tale che in ognuno dei suoi punti diventi una curva differente, in altre parole può essere interamente irregolare e non seguire alcuna legge per ogni intervallo comunque piccolo. Tale sarebbe una curva tracciata a caso dal libero movimento della mano. Questo tipo di curva non può essere rappresentato né da una né da più equazioni algebriche o trascendenti [...]
2) La legge di continuità viene meno anche quando le “differenti parti di una curva non si congiungono fra loro ...”
Le funzioni di questo secondo tipo sono chiamate *discontigue* da Arbogast e corrispondono alle nostre funzioni *discontinue*, mentre le funzioni del primo tipo sono per noi continue anche se, secondo Arbogast, violano la legge di continuità.
Le precisazioni di Arbogast sono interessanti ma sono ancora molto legate al modo di rappresentare una funzione.
Un passo decisivo nell’evoluzione del concetto di funzione si ebbe in seguito ai lavori (1807 e seguenti) di **Fourier** sulla propagazione del calore, nei quali si fa vedere che anche una linea composta di tratti fra loro scollegati (cioè una funzione discontinua nel senso moderno) può essere rappresentata da una serie trigonometrica.