Dal Libro I degli *Elementi* di Euclide: le parti di un problema

PROPOSIZIONE I.

Enunciato

Su una retta terminata data costruire un triangolo equilatero [1].

Esposizione

Sia AB la retta terminata data.

Diorismo

Si deve dunque costruire sulla retta AB un triangolo equilatero.

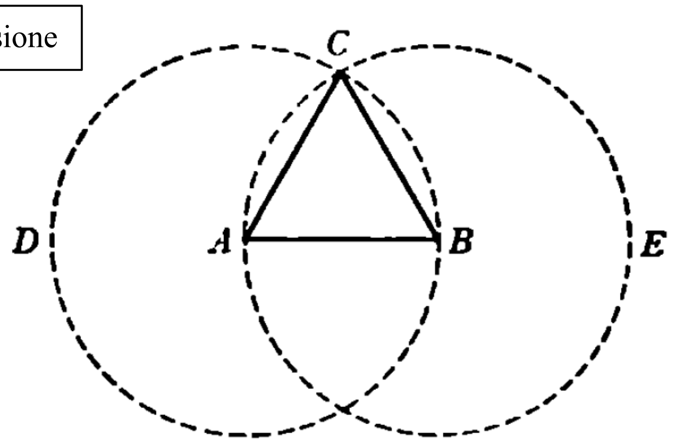
Costruzione

Con centro A e raggio AB risulti descritto [a] il cerchio BCD (post. III), di nuovo risulti descritto, con centro B e raggio BA, il cerchio ACE (id.), e dal punto C, in cui i cerchi si tagliano fra loro, risultino tracciate ai punti A, B le rette congiungenti CA, CB (post. I).

Dimostrazione

Ora, poiché il punto A è centro del cerchio CDB, si ha che AC è uguale ad AB (def. XV); di nuovo, poiché il punto B è centro del cerchio CEB, si ha che BC è uguale a BA (id.). Ma fu dimostrato che pure CA è uguale ad AB; quindi ciascuna delle due rette CA, CB è uguale alla retta AB. Ma cose che sono uguali ad una stessa sono uguali anche fra loro (noz. com. I): sono perciò uguali anche CA, CB [b]; quindi le tre rette CA, AB, BC sono uguali fra loro.

Conclusione



Dunque, il triangolo ABC è equilatero. Ed è stato costruito sulla retta terminata data AB. – C.D.F. [c]

È APPLICATA IN: I, 2, 9, 10, 11.

Dal Libro III degli *Elementi* di Euclide: le parti di un teorema

PROPOSIZIONE 2.

Enunciato

Se in un cerchio si prendono sulla circonferenza due punti a piacere, la retta che congiunge i punti cadrà internamente al cerchio.

Esposizione

Sia *ABC* un cerchio, e sulla sua circonferenza si prendano

Diorismo

i due punti *A*, *B* a piacere; dico che la retta la quale congiunge *A* con *B* cadrà internamente al cerchio.

Costruzione

Infatti, non cada in tal modo, ma, se possibile, venga a cadere esternamente, come fa la retta *AEB*, si prenda il centro del cerchio *ABC* e sia esso *D* (III, 1), si traccino le congiungenti *DA*, *DB*, e si tracci [infine] la retta *DFE*.

Dimostrazione

Poiché dunque *DA* è uguale a *DB*, anche l'angolo *DAE* è uguale all'angolo *DBE* (I, 5); e poiché nel triangolo *DAE* un lato, *AE*, risulta prolungato oltre *E* sino a *B*, l'angolo *DEB* è maggiore dell'angolo *DAE* (I, 16). Ma l'angolo *DAE* è uguale all'angolo *DBE*, per cui *DEB* è maggiore di *DBE*. E ad angolo maggiore è opposto lato maggiore (I, 19); *DB* è quindi maggiore di *DE*. Ma *DB* è uguale a *DF*; perciò *DF* è in tal caso maggiore di *DE*, il lato minore del maggiore: il che è impossibile (noz. com. VIII). Quindi la retta che congiunge *A* con *B* non cadrà esternamente al cerchio. Similmente potremo dimostrare che essa non può cadere neppure sulla circonferenza stessa; verrà quindi a cadere internamente [al cerchio].

Conclusione

Dunque, se in un cerchio si prendono sulla circonferenza... (secondo l'enunciato) [2]. – C.D.D.

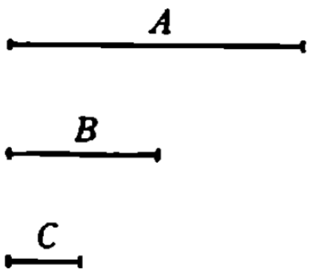
Dal Libro VII degli *Elementi* di Euclide

PROPOSIZIONE 31.

Ogni numero composto ha per divisore un numero primo.

Sia A un numero composto; dico che A è diviso da un numero primo.

Infatti, poiché A è composto, un altro numero lo dividerà. Lo divida, e sia esso B. Se allora B è primo, si sarebbe già conseguito quanto proposto. Ma se è composto, lo dividerà un altro numero. Lo divida, e sia esso C. Ora, poiché C divide B, ma B divide A, anche C divide in tal caso A (assunzione 3). Se allora C è primo, si sarebbe già conseguito quanto proposto. Se invece è composto, lo dividerà un altro numero. Procedendo così in una tale ricerca, si finirà col trovare un numero primo che farà da divisore. Se infatti non lo si trovasse, infiniti numeri [a] dividerebbero il numero A, dei quali uno sarebbe sempre minore dell'altro: il che è impossibile nel caso di numeri [b]. Si finirà quindi col trovare un numero primo che divida il numero ad esso precedente, e che dividerà anche A.



Dunque, ogni numero composto... (secondo l'enunciato). – C.D.D.

È APPLICATA IN: VII, 32; IX, 13, 20.

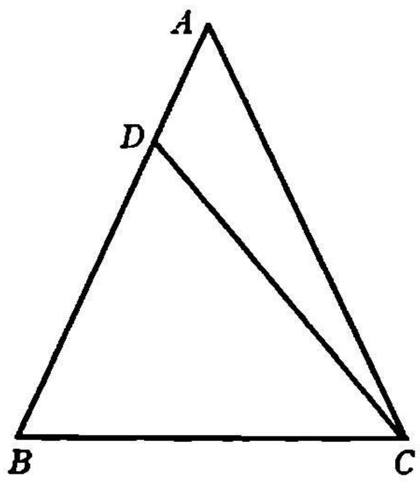
PROPOSIZIONE 6.

Se in un triangolo due angoli sono uguali fra loro, anche i lati opposti [a] *agli angoli uguali saranno uguali fra loro* [6].

Sia ABC un triangolo avente l'angolo ABC uguale all'angolo ACB; dico che anche il lato AB è uguale al lato AC.

Infatti, se AB fosse disuguale rispetto ad AC, uno dei lati sarebbe maggiore. Sia maggiore AB, dal lato maggiore AB si sottragga DB uguale al lato minore AC (I, 3), e si tracci la congiungente DC [b].

Poiché dunque DB è uguale ad AC e BC è comune, i due lati DB, BC sono uguali in tal caso rispettivamente ai due lati AC, CB, e l'angolo DBC è uguale all'angolo ACB; quindi la base DC è uguale alla base AB, ed il triangolo DBC sarà uguale al triangolo ACB (I, 4), il minore al maggiore: il che è assurdo (noz. com. VIII); AB non è quindi disuguale rispetto ad AC, e perciò è uguale.



Dunque, se in un triangolo due angoli sono uguali fra loro... (secondo l'enunciato) [a]. – C.D.D.

APPLICA: I, 3 e I, 4.

È APPLICATA IN: II, 4, 9, 10; III, 25; IV, 9, 10; VI, 3; XIII, 7, 8.

Libro I

DEFINIZIONI

(TERMINI, ὅροι)[a].

I. Punto è ciò che non ha parti[1].
II. Linea è lunghezza senza larghezza[2].

a. In greco ὅρος significa appunto termine, linea o segno di confine.

[1] È, questa del punto, la più celebre definizione di Euclide. Essa viene comunemente interpretata nel senso che il punto, non avendo parti, non ha neppure estensione alcuna: Euclide introdurrebbe in tal modo, nella sua prima definizione, il punto quale ente idealizzato, cioè il punto privo di dimensioni della *geometria di precisione*.

Chi scrive lascia naturalmente libero il lettore di associarsi a tale *communis opinio*: tuttavia osserva che la prima definizione si riferisce tanto al punto quanto all'unità, la quale viene pure definita come *non avente parti* (cfr. PLATONE, *Sofista*, 245 *a*, *Repubblica*, 526 *a*, ecc.). Già Proclo, del resto, nel suo *Commento al primo libro degli Elementi di Euclide*, nota l'identità delle due definizioni, distinguendo tuttavia, con i Pitagorici, il punto come *unità avente posizione* (ed. Friedlein, pp. 95, 21-96, Ver Eecke, pp. 85-96).

L'assimilazione del punto all'unità, secondo vedute pitagoriche, farebbe pensare non già ad un punto quasi evanescente, privo di dimensioni, ma ad un punto esteso, che (per dir così) abbia dimensioni *unitarie*. Nella sua prima definizione, dunque, Euclide avrebbe, a guisa di lapidario frontespizio, lasciato un ricordo, una traccia, dell'antica geometria pitagorica, riecheggiandone la dottrina fondamentale. Si osservi, infine, che la def. I non viene mai usata nel séguito: potrebbe esser tolta senza alcun danno per l'economia generale dell'opera. Infatti il punto (senza dimensioni) viene di nuovo definito nella def. III (cfr. A. FRAJESE, *Attraverso la storia della matematica*, 2ª ediz., Firenze, Le Monnier, 1969, pp. 92-95).

[2] Qui siamo in piena atmosfera di enti geometrici idealizzati: la linea (quindi anche la retta, che è una particolare linea) è completamente *priva di larghezza* (ἀπλατές): è lunghezza *pura*.

III. Estremi di una linea sono punti [3].

IV. Linea retta è quella che giace ugualmente rispetto ai punti su essa (cioè, ai suoi punti)[a] [4].

V. Superficie è ciò che ha soltanto lunghezza e larghezza [b].

a. Di discutibile traduzione e non facile intelligibilità. In greco ἐξ ἴσου τοῖς ἐφ' ἑαυτῆς σημείοις κεῖται. Ora, ἐξ ἴσου significa: «in condizione di uguaglianza», ma esso si riferisce a «rispetto ai punti su essa», τοῖς ἐφ' ἑαυτῆς σημείοις – nel qual caso si intende «giace ugualmente rispetto ai punti su essa», ossia i punti vanno intesi come «posti ugualmente», senza che siano inclinati in un senso o nell'altro –, oppure si riferisce a κεῖται, «giace»? Allora dovremmo intendere: «la retta che, nei punti – o: mediante i punti – posti su essa, giace ugualmente (o: uniformemente)», cioè la retta che, data la posizione dei punti, non presenta deviazioni. Insomma, nel primo caso, se verifichiamo la linea rispetto ai punti abbiamo una linea come *distanza* fra punti (anche due, per es.), nel secondo, verificando la posizione dei punti rispetto alla linea, abbiamo una linea come *direzione*. Non possiamo dire altro, filologicamente, se non che la dizione è passabilmente oscura, pur se l'idea fondamentale di Euclide sembra esser quella di una linea che presenta la stessa forma rispetto a tutti i suoi punti. Manteniamo così la significazione tradizionale.

b. Euclide e più tardi scrittori usano il termine greco ἐπιφάνεια per superficie in generale, ed invece, come vedremo, ἐπίπεδον

[3] Il punto viene qui definito nuovamente: essendo *estremo* di una linea risulta privo di dimensioni. Questa definizione si ricollega alla sesta, che definisce le linee come estremi della superficie, ed alla seconda del libro decimoprimo, che definisce la superficie come estremo, limite, del solido (στερεοῦ πέρας) cioè con gli stessi termini usati da Platone nel *Menone* (76 *a*) per definire la figura bidimensionale. Per questa coincidenza, e per un accenno di Aristotele (*Metafisica*, I, 992 *a*) al fatto che Platone preferiva chiamare il punto *principio di linea* (ἀρχὴ γραμμῆς) sorge l'idea di collegare a Platone l'insieme delle definizioni euclidee che dal solido discendono alla superficie, dalla superficie alla linea, dalla linea al punto (cfr. A. Frajese, *Attraverso* cit., pp. 94-95, ed ancora: A. Frajese, *Platone e la matematica nel mondo antico*, Roma, Studium, 1963, pp. 93 segg.). Va infine osservato che la linea è considerata come terminata, cioè avente estremi: qui e costantemente (salvo rarissima eccezione) negli *Elementi*.

[4] Definizione oscura, per la quale ogni traduzione appare incerta. Sembra che con essa Euclide voglia intendere che sulla retta non vi sono punti privilegiati, così come sul piano (def. VII) non vi sono rette privilegiate.

VI. Estremi di una superficie sono linee.

VII. Superficie piana è quella che giace ugualmente rispetto alle rette su essa (cioè, alle sue rette)[a].

VIII. Angolo piano è l'inclinazione reciproca di due linee su un piano, le quali si incontrino fra loro e non giacciano in linea retta[5].

IX. Quando le linee che comprendono l'angolo sono rette, l'angolo si chiama rettilineo.

X. Quando una retta innalzata su una [altra] retta forma[b] gli angoli adiacenti uguali fra loro, ciascuno dei due angoli uguali è retto, e la retta innalzata

(aggettivo sostantivato) per superficie *piana* (come specie del genere, dunque); quanto appunto ad Euclide, egli usa un'unica volta ἐπιφάνεια intendendo un piano, invece di ἐπίπεδον, nella definizione XI del libro undicesimo.

a. Con le opportune mutazioni, si segue esattamente la definizione IV di linea retta; non ci è così permesso, ovviamente, di risolvere in modo definitivo le oscurità di quella stessa definizione (sempre, dal punto di vista filologico).

b. Letteralmente è piuttosto *fa, produce.*

[5] La definizione euclidea di angolo appare tautologica: essa infatti sostituisce al concetto di angolo quello, non definito, di inclinazione. Quest'ultima parola (κλίσις), tuttavia, è di uso familiare nel linguaggio comune, sicché la definizione adempie ancora al compito « descrittivo ».

Va osservato, del resto, che il concetto di angolo viene solo modernamente chiarito. Piuttosto si osservi che Euclide non considera senz'altro due rette che s'incontrino in un punto (vertice dell'angolo), ma più in generale due « linee ». È soltanto nella definizione seguente (n. IX) che si definisce quell'angolo particolare (detto *angolo rettilineo*) che è compreso da linee rette (e che è l'unica specie di angolo che noi oggi di solito consideriamo). Questo modo di definire più in generale l'angolo come compreso tra linee qualunque, costituisce una delle pochissime tracce che nell'opera euclidea si trovano della più antica teoria degli angoli curvilinei. Rinviamo per questa alla nota alla proposizione XVI del libro terzo.

Si noti, infine, che viene da Euclide esplicitamente escluso che i due lati dell'angolo giacciano in linea retta: viene cioè escluso l'angolo piatto. Quest'ultimo è per noi un angolo vero e proprio in base alla nostra concezione di angolo come parte di piano; sorge inoltre per considerazioni di continuità, pensando, ad esempio, alla rotazione di una ipotetica lancetta di un orologio. Ma, come s'è già accennato nella Nota introduttiva al libro primo, considerazioni esplicite di continuità vengono, almeno fino ad un certo punto della trattazione, evitate nella geometria greca.

si chiama perpendicolare [a] a quella su cui è innalzata.

XI. Angolo ottuso è quello maggiore di un retto.

XII. Angolo acuto è quello minore di un retto.

XIII. Termine è ciò che è estremo di qualche cosa.

XIV. Figura è ciò che è compreso da uno o più termini [6].

XV. Cerchio è una figura piana compresa da un'unica linea [che si chiama circonferenza] tale che tutte le rette, le quali cadano sulla [stessa] linea[, cioè sulla circonferenza del cerchio,] a partire da un punto fra quelli che giacciono internamente alla figura, sono uguali fra loro [b].

XVI. Quel punto si chiama centro del cerchio.

XVII. Diametro del cerchio è una retta condotta per il centro e terminata da ambedue le parti dalla circonferenza del cerchio, la quale retta taglia [c] anche il cerchio per metà.

XVIII. Semicerchio è la figura compresa dal diametro e dalla circonferenza [d] da esso tagliata. E centro del

a. L'aggettivo κάθετος di una retta, appunto *perpendicolare*, significa letteralmente «lasciata, o fatta cadere»; insomma, è l'idea del filo a piombo lasciato cadere sul terreno.

b. Malgrado i Mss. le contengano, Heiberg espunge le parole (meno *stessa*, che è nostra) poste fra parentesi quadre, del resto omesse da altre antiche fonti nel riportare la definizione. L'espunzione di Heiberg trovò poi conferma nel papiro Ercolanense n. 1061, successivamente scoperto (cfr. HEIBERG, *Hermes*, XXXVIII, 1903, p. 47).

c. Cioè: divide.

d. Euclide usa la parola περιφέρεια, circonferenza, per una parte della circonferenza, vale a dire un arco della circonferenza di un cerchio. Quanto alle parole « E centro del semicerchio, ecc. », esse appaiono nel commentario di Proclo *In primum Euclidis elementorum librum*, ed. Friedlein, e non nei Mss.; tuttavia, Proclo

[6] La figura è quindi, per Euclide, essenzialmente *finita*. Così, per esempio, la retta considerata da Euclide è ciò che noi chiamiamo « segmento di retta ». Si parla quindi, negli *Elementi*, di *prolungamento* di una retta: anzi il postulato II chiede appunto che una retta possa esser sempre prolungata. Si tratta quindi di una retta potenzialmente, ma non attualmente, infinita.

semicerchio è quello stesso che è anche centro del cerchio.

XIX. Figure rettilinee sono quelle comprese da rette, vale a dire: figure trilatere quelle comprese da tre rette, quadrilatere quelle comprese da quattro, e multilatere quelle comprese da più di quattro rette [a].

XX. Delle figure trilatere, è triangolo equilatero quello che ha i tre lati uguali, isoscele quello che ha soltanto due lati uguali, e scaleno quello che ha i tre lati disuguali [b].

XXI. Infine, delle figure trilatere, è triangolo rettangolo quello che ha un angolo retto, ottusangolo quello che ha un angolo ottuso, ed acutangolo quello che ha i tre angoli acuti.

XXII. Delle figure quadrilatere, è quadrato quella che è insieme equilatera ed ha gli angoli retti [c], rettangolo [d]

nota ad un certo punto (ed. Friedlein, p. 160), anche assurdamente, che il semicerchio è la sola figura piana ad avere il centro sul proprio perimetro, e questo fa piuttosto propendere a che le parole in questione siano genuine.

a. È probabile, a quanto risulta, che siano proprio di Euclide le parole *trilatere* (τρίπλευρα, cioè τρίπλευρα σχήματα, figure di tre lati), *quadrilatere* (τετράπλευρα, di quattro lati) e *multilatere* (πολύπλευρα, di molti lati); si distinguono così le varie figure comprese nella classe delle figure rettilinee, anzi, col suo uso di τετράπλευρον, quadrilatero, Euclide pare voglia eliminare un certo uso ambiguo della parola τετράγωνον ad indicare una figura di quattro lati, mentre egli la restringe formalmente al solo quadrato.

b. Per curiosità filologica, ad uso del lettore: isoscele, ἰσοσκελής, significa « con gambe (gamba, σκέλος) uguali », scaleno poi, σκαληνός, di un triangolo che non abbia due lati uguali, è parola da Proclo (*op. cit.*, pp. 168, 24) connessa con « zoppicare », σκάζειν, da altri riferita a σκολιός, « curvo, incurvato, di sghembo ».

c. Letteralmente: « equilatera e rettangola », ὀρθογώνιον (σχῆμα, cioè figura rettangolata).

d. Rettangolo è qui detto ἑτερομήκες, *oblungo*, cioè con lati di differente lunghezza, termine ritenuto pitagorico; sempre per curiosità del lettore, notiamo che *rombo*, il quale verrà dopo, viene probabilmente da ῥέμβειν, « girare intorno di continuo », « volgersi e rivolgersi », e fra le altre cose significa una « trottola »;

quella che ha gli angoli retti, ma non è equilatera, rombo quella che è equilatera, ma non ha gli angoli retti, romboide quella che ha i lati e gli angoli opposti uguali fra loro, ma non è equilatera né ha gli angoli retti. E le figure quadrilatere oltre a queste si chiamino trapezi [7].

XXIII. Parallele sono quelle rette che, essendo nello stesso piano e venendo prolungate illimitatamente[a] dall'una e dall'altra parte, non si incontrano fra loro da nessuna delle due parti [8].

romboide, poi, è il rombo-foggiato. Euclide non usa nei suoi *Elementi* né oblungo, né rombo, né romboide; è probabile quindi che avere introdotto le definizioni di tali figure corrisponda ad un uso ancora a lui circostante, proveniente da più antichi libri di testo, e che egli riporta nella sua trattazione. *Trapezio*, infine, τραπέζιον, significa « piccola tavola ».

a. Traduciamo ordinariamente « all'infinito », ma il senso esatto di εἰς ἄπειρον è « senza limite », *illimitatamente* – e non è la stessa cosa, in quanto la nozione di infinito come un limite a cui si tenda non è proprio qui presente.

[7] Come si vede, il termine « trapezio » (τραπέζιον) è usato da Euclide in senso diverso dal nostro. E va detto che i nostri « trapezi » non vengono, del resto, mai considerati in modo autonomo negli *Elementi*. Si osservi, in questa definizione, la discontinuità tra quadrato e rettangolo. Il quadrato non viene qui considerato come uno speciale rettangolo avente tutti i lati uguali, ma come una figura che dal rettangolo è essenzialmente diversa: è infatti specificato che il rettangolo non può essere equilatero (οὐκ ἰσόπλευρον). Esso viene infatti indicato col termine ἑτερόμηκες, cioè: *avente lati disuguali*. Sorge spontaneo il collegamento con la famosa lista pitagorica dei contrari (ARISTOTELE, *Metafisica*, I, 986 *a*), nella quale una coppia è costituita dal quadrato e dall'*eteromèco* (= rettangolo) in antitesi tra loro. La discontinuità osservata costituirebbe un'altra traccia, di carattere storico, dell'antica geometria pitagorica negli *Elementi*: ciò tanto più se si pone mente al fatto che nel séguito dell'opera al termine pitagorico ἑτερόμηκες (usato in questa definizione) Euclide preferisce quello ὀρθογώνιον (= con angoli retti: cfr. libro II, def. I, prop. I e seguenti).

[8] Per la definizione di rette parallele, si veda quanto in proposito è detto nella Nota introduttiva al libro primo.

assiòma dal *gr.* AXIOMA propr. *stima* che si fa di una cosa, da AXIÒO *stimare, reputare*, e questo da ÀGO che *propr.* vale *spingere*, d'onde il senso di *alzare, sollevare* e poi quello di *pesare*, che diè causa all'altro fig. di *stimare, giudicare, osservare* (*gr.* ÀXIOS *ciò che spinge, che agisce, che ha forza, virtú, valore, meritevole, degno*) (v. *Agire*). — Verità o Massima per se stessa evidente, che non ha bisogno di prova, di dimostrazione (perché già provata e pesata).

Deriv. *Assiomàtico.*

agíre dal *lat.* ÀGERE *andare, venire, condurre, spingere innanzi, fare, operare*, portato sotto la quarta coniugazione (in *ire*) dalla *rad.* AG (*zend.* AZ, *germ.* AK) *muovere*, che è nel *sscr.* AG'ÀTI *spingere, condurre, andare*, AG'MAS *via, tratto*, ond' anche il *gr.* ÀGÔ (*a. n. ted.* AKA), AGINÈ *muovo, conduco, faccio*, AGÒS, ÀKTOR *duce* AGÒN *contesa, certame*, AGÚIA *via, strada* ÀGRA (*zend.* AZRA) *caccia* e l'*island.* IAGA *esercitare*. Dunque la idea originaria si è quella di *muovere*, d'onde ne sorsero po diversi significati, tali nel greco quelli d *guidare, menare, portare, alzare, allevare sollevare* (*un peso*), *pesare*, e *fig. osservare stimare, giudicare, assumere un incarico*, e nel latino anche *andare, venire, fare, operare; diportarsi; vivere; procurare; trattare dire, raccontare.* — Operare, Produrre i suo effetto.

Deriv. *Agènte; Agévole; Agíbile; Àgile; Agitàre, Attívo; Atto; Attóre; Attuàle; Azióne.*

Cfr.: *Agnèllo; Agòne; Agora; Agro; Ambíguo, Anagogía; Asse; Assiòma; Coagulàre; Coàtto; Egemonía; Esàme; Esàtto; Esègesi; Esígere; Esíguo Esíle; Indagàre; Isàgoge; Litigàre; Narràre; Paràgoge; Prodígio; Pròdigo; Purificàre; Redígere Sinagòga; Stratègo; Transígere.*

narràre *fr.* narrer: = *lat.* NARRÀRE contratto dall'antiquato GNARIGÀRE (come Purgàre = lat.*purigare*), che trova suo fondamento nella sua *rad.* GNÂ- *conoscere, render noto*, onde il *sscr.* gnânam *cognizione*, caduta la G come nel *lat.* nòscere = gnòscere (v. *Conoscere*); e IGÀRE per ÀGERE *fare*, che indica *azione*.

Far conoscere raccontando; Esporre partitamente alcuna cosa, a fine di dare notizia altrui.

Deriv. *Narraménto; Narratíva; Narratóre-tríce; Narrazióne*, onde *Narrazioncèlla-ína; Enarràre*, onde *Inenarràbile.*

POSTULATI (αἰτήματα) [1]

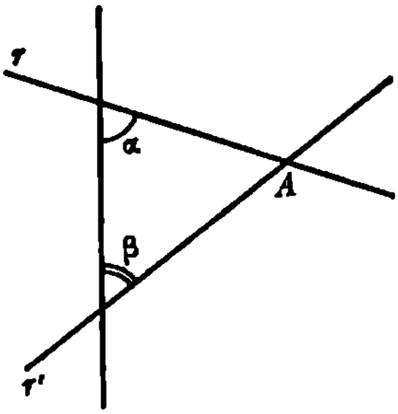
I. Risulti postulato: che si possa condurre una linea retta da un qualsiasi punto ad ogni altro punto [a].

II. E che una retta terminata (= finita) [b] si possa prolungare continuamente in linea retta.

III. E che si possa descrivere un cerchio con qualsiasi centro ed ogni distanza (= raggio) [c].

IV. E che tutti gli angoli retti siano uguali fra loro.

V. E che, se una retta venendo a cadere su due rette forma gli angoli interni e dalla stessa parte minori di due retti (= tali che la loro somma sia minore di due retti), le due rette prolungate illimitatamente verranno ad incontrarsi da quella parte in cui sono gli angoli minori di due retti (= la cui somma è minore di due retti) [2].



a. Letteralmente: « da ogni punto ad ogni punto ». Insomma, noi diremmo da un qualsiasi punto fra tanti, il greco dice piuttosto da ogni punto fra tutti i possibili.

b. Discutibile se tradurre πεπερασμένην greco con *limitata*, *terminata*, una linea retta cioè che ha termini, fini, confini, o con *finita*, poiché « terminata » potrebbe non indicare, magari, a sufficienza che si tratta di una linea retta avente *due* estremità, due termini, ossia di un segmento rettilineo.

c. Euclide dice: παντὶ κέντρῳ καὶ διαστήματι, « con ogni centro e distanza », al solito intendendosi « con un centro ed una distanza, cioè un raggio, qualunque ». I Greci non avevano parola per *raggio*; dovendo parlare di raggi, usavano – come vedremo – l'espressione αἱ ἐκ τοῦ κέντρου, « le (rette condotte) dal centro ».

[1] Sul significato dei postulati si veda quanto in proposito è detto nella Nota introduttiva al libro primo.

[2] È, questo, il celebre postulato quinto, o postulato delle parallele, o postulato di Euclide propriamente detto. Oltre a quanto in proposito

è stato detto nella nota introduttiva al libro primo, facciamo osservare che la forma sotto la quale Euclide enuncia il suo quinto postulato (che cioè s'incontrano due rette formanti con una trasversale angoli coniugati interni la cui somma sia minore di due retti) non è quella più comunemente adottata nelle moderne trattazioni elementari. Più comune è la forma dell'*unicità*: « Per un punto fuori di una retta passa una sola parallela alla retta stessa ». Dal postulato sotto forma euclidea si passa alla forma dell'unicità, ad esempio attraverso la I, 30 di Euclide (proprietà transitiva del parallelismo), come viene spiegato nella nota a detta proposizione. Inversamente dalla forma dell'unicità si passa a quella euclidea con facili considerazioni.

La forma dell'unicità è certo assai intuitiva: alla nostra intuizione sembra impossibile che per uno stesso punto passino più parallele ad una retta data. Ma, come s'è detto nella Nota introduttiva al libro primo, le geometrie non euclidee, cioè quelle che partono dalla negazione del quinto postulato, se pure non rispondono, è vero, alla nostra intuizione spaziale, sono tuttavia logicamente coerenti. Così nella geometria non euclidea detta *iperbolica*, o di Lobacevski, passano per un punto due parallele ad una retta data (o anche infinite, secondo la definizione che di parallelismo venga data), mentre nessuna ne passa nella geometria non euclidea detta *ellittica*, o di Riemann.

Altri enunciati del quinto postulato sono anche i seguenti:

1) non esistono rette asintotiche (cfr. Nota introduttiva al libro primo);

2) per tre punti non allineati passa la circonferenza di un cerchio;

3) dato un triangolo, ne esiste uno simile al dato e grande a piacere (Wallis, Saccheri);

4) esistono rette equidistanti.

Finalmente, da un punto di vista strettamente stilistico, va osservato che Euclide evita sempre un termine equivalente a quello nostro *somma*. Così in questo quinto postulato non è detto che le due rette devono formare angoli interni dalla stessa parte (= coniugati interni) aventi somma minore di due retti, ma è detto che le due rette formano angoli (interni dalla stessa parte) *minori di due retti*.

NOZIONI COMUNI (κοιναὶ ἔννοιαι) [a] [1]

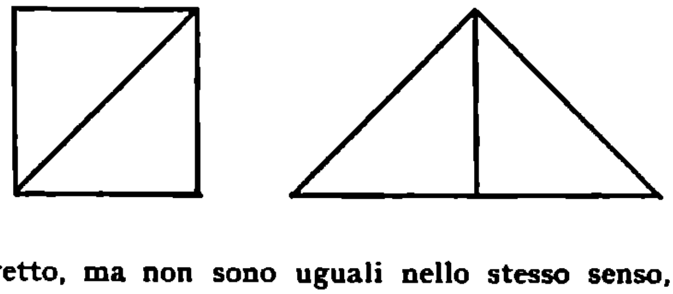
I. Cose che sono uguali ad una stessa sono uguali anche fra loro.

II. E se cose uguali sono addizionate a cose uguali, le totalità sono uguali [2].

a. Assai discussa è la questione se le Nozioni comuni siano di Euclide, tutte o soltanto le prime tre, o – addirittura – se non siano affatto di Euclide, neppure nel termine di nozioni comuni. Tuttavia non si può dire che vi siano stati fino ad oggi argomenti decisivi, e magari ci si trova dinanzi il contrario, cioè degli argomenti a favore, per opporsi alle «Nozioni comuni» come termine euclideo; anzi, sulla base delle varie argomentazioni (fra cui il commentario di Proclo al I libro, pp. 196, 15, che riconosce le cinque Nozioni comuni da noi date, e critica la indebita pretesa di Erone, Erone di Alessandria – il massimo ingegnere e professore di ingegneria alessandrino, di riconoscerne come autentiche solo tre, ossia le tre prime), possiamo concludere che in libri di testo precedenti a quello euclideo la presenza

[1] Sulle *Nozioni comuni* in linea generale, si veda quanto è stato detto nella Nota introduttiva al libro primo. Su tutto l'argomento dei princìpi (e delle Nozioni comuni in particolare) sono assai notevoli i recentissimi studi dell'ungherese Árpad Szábó. Si veda, per esempio, la sua memoria: *Anfänge des Euklidischen Axiomensystems*, in: «Archive for History of Exact Sciences» (I, 1960), pubblicato anche nella raccolta: *Zur Geschichte der griechischen Mathematik*, edita da Oskar Becker (Darmstadt, 1965, pp. 355-461).

[2] Questa Nozione comune, così come la terza, mostra che per Euclide il termine «uguale» (ἴσος) si riferisce all'uguaglianza di grandezza. Così ad esempio per i poligoni non si tratta dell'uguaglianza in senso stretto, cioè dell'uguaglianza completa di tutti gli elementi (detta da noi anche *congruenza*), ma dell'uguaglianza di estensione (detta da noi anche *equivalenza*). Infatti somme di poligoni uguali in senso stretto non sono uguali nello stesso senso, ma soltanto equivalenti.



Così, le due figure qui riportate (un quadrato e un triangolo) sono somme di figure uguali in senso stretto, ma non sono uguali nello stesso senso, bensì equivalenti (hanno la stessa estensione = area).

III. E se da cose uguali sono sottratte cose uguali, i resti sono uguali.
VII. E cose che coincidono[a] fra loro sono fra loro uguali[3].
VIII. Ed il tutto è maggiore della parte[b][4].

di più di un assioma della specie delle Nozioni comuni sembra accertabile e che almeno le prime tre Nozioni comuni erano contenute nel testo euclideo originario (cfr. per questo, F. ENRIQUES, *Per la Storia della Logica*, Bologna, Zanichelli, 1922, cap. I, e *Gli elementi*, di Enriques e vari collaboratori, vol. I, pp. 47-48; HEATH, *The thirteen books of Euclid's Elements*, pp. 221-234 e la nota 1 successiva).

a. Secondo sia usato all'attivo o al passivo, quale termine geometrico, ἐφαρμόζειν ha un diverso significato: al passivo, ἐφαρμόζεσθαι, significa « essere applicato a », senza una qualche implicazione che la figura applicata venga esattamente a coincidere, e debba coincidere, con la figura cui è applicata; all'attivo, ἐφαρμόζειν – e qui è usato all'attivo –, significa intransitivamente « convenire, adattarsi esattamente, coincidere con ».

b. A questo punto, i Mss. riportano quattro nozioni, dello stesso tipo delle I-III, tre delle quali sono date da Heiberg in parentesi e corrispondono alla IV, V, e VI nostre; la quarta poi, che si trova posta fra IV e V, è da Heiberg omessa del tutto; essa dice: « E se cose uguali sono sottratte da cose disuguali, i resti sono disuguali ». Tutte queste nozioni, per genuinità più che dubitevoli, appaiono in realtà non necessarie e, in vista del principio che gli assiomi non dovrebbero essere con facilità moltiplicati, sarebbe opportuno che fossero omesse. Quanto alla IX, che è data pure da buoni Mss. come da collocarsi dopo il postulato V (e difatti essa spetta alla geometria in particolare, come

[3] Come si vedrà meglio nella nota alla I, 4, Euclide si serve del movimento intuitivo della meccanica solo tre volte in tutta l'opera, per sovrapporre una figura ad un'altra. Se, come risultato della sovrapposizione, si ha la completa coincidenza, Euclide sente il bisogno di enunciare un postulato per poter affermare che le due figure sono in tal caso uguali (solo nel senso di uguaglianza di estensione da lui inteso).

[4] Che il tutto sia maggiore della parte, è caratteristica degli insiemi finiti, cioè di quelli contenenti un numero finito di elementi. Per gli insiemi infiniti non vale più: anzi il fatto che non valga è, nella moderna teoria degli insiemi, proprietà caratteristica della *infinità* dell'insieme. La relativa antinomia, o paradosso che dir si voglia, si presentò a Galileo nel confronto tra i numeri ed i loro quadrati (*Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze*, Giornata prima: *Opere*, VIII, 78-79; cfr. anche l'edizione a cura di A. Carugo e L. Geymonat, Torino, Boringhieri, 1958,

[IV. E se cose uguali sono addizionate a cose disuguali, le totalità sono disuguali] [5].

[V. E doppi di una stessa cosa sono uguali fra loro].

[VI. E metà di una stessa cosa sono uguali fra loro].

dice Proclo, *op. cit.*, pp. 196, 21, e non alle scienze in generale), è senz'altro da ritenersi interpolazione. E difatti l'assioma non è necessario, poiché quanto esso stabilisce è già incluso nel significato del postulato I; deriva probabilmente dal passo in I, 4, in cui Euclide afferma che « se ... la base *BC* non coincidesse con la base *EF*, due rette verrebbero a comprendere uno spazio: il che è impossibile » (cfr. per questo HEATH, *op. cit.*, vol. I, p. 232).

pp. 44-45). Ma già forse nel *Carmide* di Platone si trovano tracce di difficoltà del genere: Euclide taglia corto ad esse con questa sua Nozione comune ottava (cfr. A. FRAJESE, *Platone* cit., pp. 74 segg.).

[5] Le Nozioni comuni 4, 5, 6, 9, pur essendo implicitamente o esplicitamente applicate negli *Elementi*, vengono da Heiberg riconosciute come interpolate e quindi non sono da lui inserite nel testo. Del resto, la quinta Nozione comune, ad esempio, può ricavarsi sostanzialmente dalla seconda.

Libro V

DEFINIZIONI

I. Una grandezza è parte [a] di una grandezza, la minore di quella maggiore, quando essa misuri la maggiore.

II. La grandezza maggiore è multipla di quella minore, quando sia misurata dalla minore.

III. Rapporto (o *ragione*, in greco, λόγος, *ratio*) fra due grandezze omogenee è un certo modo di comportarsi rispetto alla quantità [1].

a. La parola « parte » (in greco μέρος) significa qui *sottomultiplo*, ossia parte aliquota, mentre nella Nozione comune V: « il tutto è maggiore della parte », parte è usato in senso più generale; si può esprimere tale distinzione con le parole, ad esempio, di ARISTOTELE, *Metaph.*, 1023 b 12: « In un senso parte è ciò in cui una quantità può comunque essere divisa; infatti ciò che è sottratto da una quantità, in quanto quantità, è sempre chiamato " parte " di essa, come ad es. due è detto essere, in un senso, parte di tre. Ma in un altro senso *parte* è soltanto *ciò che misura* delle quantità. Così due è, in un senso, detto esser parte di tre, in un altro no ».

[1] Questa *definizione* è stata criticata, in quanto tautologica. Ma è evidente che in essa Euclide non pretende di *definire* il rapporto, ma enuncia anzitutto una condizione (l'omogeneità) alla quale le grandezze devono soddisfare affinché si possa parlare di rapporto fra di esse. Nella definizione seguente (la quarta), nello stesso ordine di idee, Euclide impone alle grandezze una seconda condizione, oltre a quella di essere omogenee: di soddisfare a quello che i posteri chiameranno *postulato di Archimede*.

Per quanto poi riguarda l'*omogeneità*, essa va considerata come un concetto primitivo, l'introduzione del quale risponde ad una intuizione

IV. Si dice che hanno fra loro rapporto (o *ragione*) le grandezze le quali possono, se moltiplicate, superarsi reciprocamente [2].

immediata, dato anche che il termine che abbiamo trasportato nella nostra lingua ha per i Greci un chiaro significato.

Ma nella def. III c'è anche un'anticipazione su quel che sarà il rapporto tra due grandezze (omogenee ed archimedee). Si tratta di *qualcosa* che riguarda la *quantità*.

Così, per esempio, il rapporto tra due figure piane prescinde dalla loro forma, ma si riferisce soltanto alle loro *aree*. Sicché una grandezza, che sia uno dei termini di un rapporto, può essere sostituita da un'altra grandezza *uguale* senza che il rapporto (rispetto ad una terza grandezza) subisca alcun cambiamento.

Che poi il rapporto, così come viene definito per astrazione nella def. V (cfr. nota a detta def.) soddisfi appunto al requisito adombrato nella def. III, viene dimostrato da Euclide nella prop. V, 7 (cfr. nota ivi) la quale acquista quindi un significato importante.

[2] Euclide considera come *aventi rapporto* tra loro due grandezze soltanto quando esse soddisfino al postulato detto di Archimede, cioè quando si può trovare un multiplo di una delle grandezze tale che esso superi l'altra:

$$mA > B$$

Le grandezze devono cioè, come oggi si dice, essere *archimedee*. A Euclide era ben presente il caso delle grandezze *non-archimedee* (che egli quindi esclude dalla sua trattazione). Tali sono ad esempio gli angoli, se a quelli (rettilinei) che comunemente oggi consideriamo si aggiungono quelli curvilinei (nei quali almeno uno dei lati è una linea curva). Così, per esempio, nella III, 16 (cfr. nota ivi) Euclide mostra, in sostanza, che non esiste alcun sottomultiplo di un angolo rettilineo che sia minore dell'angolo di contingenza (cioè dell'angolo curvilineo compreso tra il cerchio e la tangente). Angoli rettilinei e curvilinei presi insieme non soddisfano cioè al postulato di Archimede che sotto la forma del sottomultiplo si enuncia appunto come possibilità di trovare un sottomultiplo della grandezza maggiore, il quale sia minore della grandezza minore.

Perciò Euclide non ammette nella sua geometria gli angoli curvilinei, i quali, invece, come sappiamo ad esempio da un brano di Aristotele (*Anal. Pr.*, I, 24, 13-22) trovavano prima diritto di cittadinanza nella geometria.

Come è noto, nel secolo XIX venne, da Dedekind e Cantor, enunciato il postulato della continuità. Da questo (sotto la forma di Dedekind) può dedursi il postulato di Archimede. Quest'ultimo, come del resto è intuitivo (dato che rivela un collegamento tra le grandezze, senza distacchi incolmabili), contiene quindi in sé un concetto, una *carica* (per dir così) di continuità.

È in sostanza l'enunciazione del concetto di continuità così come Euclide poteva darlo. Si può perciò in un certo senso considerare la def. IV del libro quinto come « il sesto postulato di Euclide » (cfr. l'articolo di

V. Si dice che [quattro] grandezze sono nello stesso rapporto, una prima rispetto ad una seconda ed una terza rispetto a una quarta, quando risulti che equimultipli della prima e della terza [presi] secondo un multiplo qualsiasi, ed equimultipli della seconda e della quarta [presi pure] secondo un multiplo qualsiasi, sono gli uni degli altri, cioè ciascuno dei due primi del suo corrispondente fra i secondi, o tutti e due maggiori, o tutti e due uguali, o tutti e due minori, se considerati appunto nell'ordine rispettivo (= quando cioè, presi equimultipli qualunque della prima grandezza e della terza ed equimultipli qualunque della seconda e della quarta, secondo che il multiplo della prima sia maggiore, uguale o minore del multiplo della seconda, l'equimultiplo della terza è corrispondentemente maggiore, uguale o minore dell'equimultiplo della quarta) [3].

A. Frajese recante questo titolo in: « Periodico di matematiche », n. 1-2, 1968, pp. 150-159).

Si potrebbe aggiungere che a partire dal libro quinto Euclide si senta maggiormente in diritto di ricorrere a considerazioni intuitive di continuità: questo spiegherebbe, ad esempio, l'ammissione dell'esistenza della quarta proporzione dopo tre grandezze date, che si trova nella V, 18 e nella applicazione del metodo di esaustione nel libro XII.

Va finalmente detto che il nome di « postulato di Archimede » è del tutto recente (secolo XIX), e venne assegnato a causa dell'uso che Archimede fa di detto postulato nelle sue opere. Ma è evidente che esso è dovuto all'autore della teoria delle proporzioni, cioè a quell'Eudosso di Cnido al quale (come sembra certo) è dovuta la seguente definizione quinta di proporzione, e al quale è anche dovuto quel metodo che i posteri dissero « di esaustione » (cfr. nota alla XII, 2).

[3] È questa la celebre definizione di proporzione degli *Elementi* di Euclide (per quanto il termine *proporzione* entri solo nella definizione seguente). Qui si definisce l'uguaglianza tra due rapporti: Euclide rinunzia cioè alla definizione diretta di rapporto, e ne fornisce una definizione *per astrazione*.

Per mostrare di che si tratti, portiamo l'esempio della definizione di temperatura che una volta veniva adottata in ogni trattato di fisica. Volendo appunto definire la temperatura, si considerano tutti i possibili corpi, e si classificano i corpi stessi ponendo in uno stesso gruppo tutti quelli che posseggono *uguale temperatura*: si deve dunque disporre di una definizione di « uguaglianza di temperatura ». Se allora prendiamo in considerazione gli oggetti di uno stesso gruppo, troviamo che essi possiedono

VI. Grandezze che hanno lo stesso rapporto si chiamino proporzionali[a].

a. Traduciamo il greco ἀνάλογον che è l'equivalente, avverbialmente, di ἀνὰ λόγον, con « proporzionale, proporzionali », o « in proporzione, proporzionalmente », a seconda della convenienza; inoltre: l'espressione rituale greca, in cui ἀνάλογον è appunto usato avverbialmente, è del tipo: ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ, οὕτως ἡ ΗΔ πρὸς τὴν ΔΖ, « quindi proporzionalmente, come *BA* sta ad *AC*, così *GD* sta a *DF* », per fare un esempio; preferiamo mantenere la nostra clausola tradizionale « quindi, in proporzione, *BA* sta ad *AC* come *GD* sta a *DF* ».

i caratteri più svariati: forme diverse, pesi diversi, materie diverse, e così via.

Ma c'è un *quid* che accomuna tutti gli oggetti di ciascun gruppo: è il fatto che essi possiedono *uguale temperatura*. Se allora facciamo *astrazione* da tutti gli altri caratteri, diversi da oggetto a oggetto, e fermiamo la nostra attenzione sul solo carattere comune a tutti, ecco che possiamo ritenere definita (per astrazione) la temperatura stessa (cfr. F. Enriques, *Per la storia della logica*, Bologna, 1922, pp. 148-150).

Questa definizione per astrazione trova poi largo posto nella matematica moderna (cfr. il concetto di insieme-quoziente).

La def. V, 5 di Euclide è dunque quella dell'uguaglianza di rapporti, ossia fornisce una definizione per astrazione del rapporto tra due grandezze.

Il fatto che Euclide proceda in tal modo fa, per dir così, la fortuna della teoria riguardante l'uguaglianza di due rapporti, ossia della teoria delle proporzioni, che entra trionfalmente in tutte le trattazioni matematiche, anche nelle più elementari.

Euclide, a dir vero, non parla di rapporti uguali, ma di grandezze che sono a due a due *nello stesso rapporto*.

Ma si tratta di una vera e propria relazione di eguaglianza (« di equivalenza » diciamo nel linguaggio odierno), che soddisfa alle tre famose proprietà riflessiva, simmetrica, transitiva (cfr. nota alla V, 11 nella quale Euclide dimostra esplicitamente che per la suddetta relazione vale la proprietà transitiva).

La definizione di proporzione che Euclide viene a dare nella quinta del libro quinto non sembra sia opera personale di Euclide, ma viene attribuita concordemente al grande matematico Eudosso di Cnido, vissuto nel IV secolo a. C. (contemporaneo di Platone, e anteriore di qualche decennio a Euclide). A Eudosso, anzi, viene attribuito il *nocciolo* di tutta la teoria del libro quinto, per quanto sia assai probabile che nell'elaborazione e nella stesura del libro stesso abbia anche in misura notevole partecipato Euclide stesso.

È noto che Galileo attaccò decisamente la definizione eudossiana-euclidea di proporzione, ritenendola troppo lontana dall'intuizione. Ciò nel

VII. Quando, degli equimultipli, il multiplo della prima grandezza è maggiore del multiplo della seconda,

Principio di Giornata quinta della sua ultima opera *Discorsi e Dimostrazioni matematiche* (cfr. A. FRAJESE, *Galileo matematico*, Roma [Studium], 1964, pp. 38-52).

Da molti matematici, antichi e recenti, la suddetta definizione (con la relativa teoria) venne invece assai apprezzata, o addirittura ammirata.

Euclide dice che due grandezze A, B sono nello stesso rapporto di altre due C, D quando in qualunque modo si prendano due equimultipli mA, mB delle due prime, e in qualunque modo si prendano due equimultipli nC, nD delle altre due, a seconda che si abbia:

$$mA \gtreqless nB$$

si ha corrispondentemente

$$mC \gtreqless nD.$$

Possiamo anche adoperare le parole con le quali Galileo (*loc. cit.*) sia pure per criticarle, parafrasa il testo euclideo: « Allora quattro grandezze sono proporzionali, quando gli ugualmente multiplici della prima e della terza, presi secondo qualunque multiplicità, si accorderanno sempre nel superare, mancare o pareggiare gli ugualmente multiplici della seconda e della quarta ».

Come si vede, occorre paragonare tra loro, nel modo indicato dalla definizione, *tutti* gli equimultipli (rispettivamente delle due coppie di grandezze) « secondo qualunque multiplicità ». In altre parole la concordanza di segni

$$mA \gtreqless nB \qquad mC \gtreqless nD$$

deve verificarsi per qualunque valore dei numeri interi m, n, ossia *per infiniti valori*.

Ecco quindi che nella definizione, nonostante le apparenze, entra l'infinito: quell'infinito che è inevitabile nel processo di determinazione del « rapporto » tra due grandezze incommensurabili. Occorre infatti dire che la definizione quinta si riferisce sia al caso di grandezze commensurabili sia a quello di grandezze incommensurabili. La definizione unica porta a qualche complicazione, ma si può ugualmente, nella definizione stessa, ricercare quale sia la parte che si riferisce alle grandezze commensurabili.

Essa è quella relativa al segno di uguaglianza. Che si abbia: $mA = nB$ e insieme $mC = nD$ è possibile soltanto nel caso della commensurabilità tra A, B e tra C, D: infatti sono le grandezze commensurabili quelle che possono avere multipli comuni (mA, nB e mC, nD).

Nel caso delle grandezze incommensurabili, invece, il segno di uguaglianza non potrà mai presentarsi e quindi in tal caso la definizione può considerare soltanto le disuguaglianze. Cioè la definizione si riduce alle concordanze dei segni:

$$mA \gtrless nB \qquad mC \gtrless nD$$

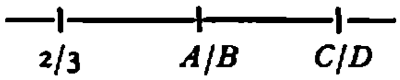
Come s'è detto, i numeri interi m, n devono assumere tutti i possibili (infiniti) valori. Per rendercene conto, vediamo quale sia il significato di ma il multiplo della terza non è maggiore del multiplo della quarta, si dice allora che la prima gran-

una sola concordanza di segni, per una sola coppia di particolari valori di m, n. Ad esempio per $m = 3$, $n = 2$ vediamo quale è il significato di una concordanza di segni come:

$$3A > 2B \longrightarrow 3C > 2D$$

Ciò vuol dire che A è maggiore di $2/3\,B$ e che al tempo stesso C è maggiore di $2/3\,D$. Oggi diremmo che il rapporto $A:B$ è maggiore di $2/3$ (e scriveremmo $A:B > 2/3$) e che anche il rapporto $C:D$ è maggiore di $2/3$. Ossia il numero razionale $2/3$ ci offre un valore approssimato per difetto tanto dell'un rapporto quanto dell'altro: i due rapporti $A:B$ e $C:D$ hanno un valore razionale approssimato per difetto in comune.

Se consideriamo, come oggi facciamo, i due rapporti $A:B$ e $C:D$ come due numeri reali (irrazionali nel caso della incommensurabilità)



è evidente che l'essere ambedue i numeri reali maggiori di $2/3$ non porta all'uguaglianza: potrebbe, ad esempio, essere $A:B < C:D$. Perché i due rapporti (numeri reali) $A:B$ e $C:D$ siano uguali, occorre che *la totalità* dei valori approssimati per difetto dell'un rapporto sia costituita da valori approssimati per difetto anche dell'altro rapporto.

Occorre cioè (diciamo oggi) che affinché due numeri reali siano uguali essi determinino la stessa *sezione* nell'insieme dei numeri razionali. Dunque pur non considerando esplicitamente i rapporti come numeri, tuttavia Euclide dà per l'uguaglianza tra rapporti la stessa definizione che in tempi recenti s'è ripresa per l'uguaglianza tra numeri reali.

Quindi occorrono concettualmente *infinite* verifiche delle concordanze di segni: Eudosso non ha potuto *evitare*, *escludere*, l'infinito nel determinare (o definire) il rapporto tra due grandezze incommensurabili: lo ha però *imbrigliato*, nel senso che ha ideato un procedimento rigoroso, contenuto in uno schema fisso invariabile.

Vedremo che analogo carattere presenta il metodo di esaustione pure attribuito a Eudosso di Cnido (cfr. nota alla XII, 2).

Nel caso commensurabile la definizione appare sovrabbondante: basta trovare una sola coppia di valori di m, n per la quale si verifichi la concordanza per il segno d'uguaglianza, per poter concludere che i due rapporti sono uguali. Così, per esempio, se fosse:

$$3A = 2B: \qquad 3C = 2D$$

si concluderebbe:

$$A:B = C:D = 2/3$$

Per concludere che due rapporti non siano uguali, basta che *non si verifichi una sola concordanza* tra i segni considerati nella def. V: Euclide precisa nella def. VII anche il senso della disuguaglianza (cfr. nota alla suddetta def. VII).

dezza ha, rispetto alla seconda, rapporto maggiore di quello che la terza ha rispetto alla quarta [4].

VIII. Una proporzione che consista di[a] tre termini è la minore possibile (= Una proporzione deve avere almeno tre termini).

IX. Quando tre grandezze sono proporzionali, si dice che la prima ha con la terza rapporto duplicato rispetto a quello che ha con la seconda [5].

a. Seguiamo la lezione adottata da Camerer e da Heiberg, e che è quella del Ms. Peyrard; vi è un'altra lezione, equivalente a « Una proporzione consiste di tre termini ***almeno*** (o ***al minimo***) ». Si è discusso sulla genuinità o meno di questa definizione, anche se in definitiva si tenda, almeno in sostanza, a ritenerla genuina. Letteralmente è poi: « Una proporzione in tre termini ».

[4] Come è stato accennato alla fine della nota definizione V, poiché quest'ultima richiede che la concordanza dei segni tra gli equimultipli abbia luogo per *tutti* i valori possibili di m, n basta ***una sola discordanza*** perché non si abbia l'uguaglianza dei rapporti. Ma Euclide precisa anche il senso della disuguaglianza nel modo seguente:

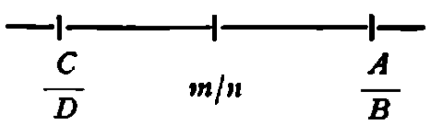
si dice che $$A : B > C : D$$

se è possibile trovare due valori (una sola coppia di valori!) m, n tali che si abbia insieme:

$$mA > nB \qquad mC \leqslant nD$$

Nel nostro modo di scrivere abbiamo cioè:

$$A : B > \frac{m}{n} \qquad C : D \leqslant \frac{n}{m}$$



ossia il numero razionale n/m ci dà un valore approssimato per difetto del rapporto $A : B$ e per eccesso di quello $C : D$, vale a dire il numero razionale n/m *si infiltra* tra i due rapporti (numeri reali) $A : B$ e $C : D$: questi son dunque disuguali, nel senso: $A : B > C : D$.

[5] La proporzione di tre termini (la « minore » possibile) è la proporzione continua, avente i due medi eguali tra loro:

$$A : B = B : C$$

La prima grandezza A ha rispetto alla terza C ragione (= rapporto)

X. Quando quattro grandezze sono proporzionali, si dice che la prima ha con la quarta rapporto triplicato rispetto a quello che ha con la seconda, e si procederà sempre così di séguito, comunque sia la proporzione data in principio [6].

XI. Si dicono grandezze omologhe gli antecedenti rispetto agli antecedenti ed i conseguenti rispetto ai conseguenti.

duplicato di quello che ha rispetto alla seconda B. Indichiamo questo fatto scrivendo:

$$A : C = \text{dupl.}\,(A : B)$$

Va osservato che non è già che il rapporto $A : C$ sia *doppio* di quello $A : B$. Se supponiamo che le grandezze A, B, C siano numeri, si vede sùbito che il rapporto $A : C$ è uguale al quadrato del rapporto $A : B$.

Infatti, essendo:

$$\frac{A}{B} = \frac{B}{C}$$

ed avendosi:

$$\frac{A}{B} \cdot \frac{B}{C} = \frac{A}{C}$$

risulta:

$$\frac{A}{B} \cdot \frac{A}{B} = \frac{A}{C}$$

e infine:

$$\frac{A}{C} = \frac{A^2}{B^2}.$$

Se poi A, B, C sono *rette* (= segmenti di retta) la prima sta alla terza come il quadrato costruito sulla prima sta al quadrato costruito sulla seconda:

$$A : C = q(A) : q(B)$$

La definizione si riferisce però a grandezze qualunque ed ha legami con il concetto di «ragione composta» (cfr. nota alla VI, 23).

[6] Se quattro grandezze A, B, C, D soddisfano alle relazioni:

$$A : B = B : C = C : D$$

(se cioè si sono inserite due medie proporzionali B, C tra le due grandezze A, D) si dice che A ha con D ragione (= rapporto) triplicata di quella che ha con B. Anche qui va osservato che non è già che $A : D$ sia il triplo di $A : B$, bensì (se si tratta di grandezze numeriche) che $A : D$ è il cubo di $A : B$.

Infatti:

$$\frac{A}{D} = \frac{A}{B} \cdot \frac{B}{C} \cdot \frac{C}{D} = \frac{A}{B} \cdot \frac{A}{B} \cdot \frac{A}{B} = \frac{A^3}{B^3} = \left(\frac{A}{B}\right)^3$$

XII. Si ha rapporto permutato[a] quando si prenda in considerazione l'antecedente rispetto all'antecedente ed il conseguente rispetto al conseguente.

XIII. Si ha rapporto inverso[b] quando si prenda in considerazione il conseguente come antecedente rispetto all'antecedente come conseguente.

XIV. Si ha composizione di rapporti[c] quando si consideri la somma dell'antecedente e del conseguente[d] in rapporto al conseguente preso da solo.

XV. Si ha scomposizione di rapporti[e] quando si consideri la differenza tra l'antecedente ed il conseguente[f] in rapporto al conseguente preso da solo.

XVI. Si ha conversione di rapporti quando si consideri il conseguente in rapporto alla differenza tra l'antecedente ed il conseguente.

XVII. Date più grandezze ed altre in ugual numero, [disposte le une e le altre in un determinato ordine], se delle prime grandezze vengono prese a due a due quelle consecutive ed esse sono nello stesso rapporto delle corrispondenti consecutive fra le seconde grandezze[g], si ha rapporto *ex aequo* quando delle prime

a. È il rapporto che si dice aversi *permutando*, cioè permutando i rapporti della proporzione, o *alternando*; letteralmente poi, e vale per tutte le definizioni similari, il greco dice: « Ragione alternata, *o* inversa, *o* composizione di ragione..., e simili, è il prendere (λῆψις), la presa in considerazione di, ecc. ».

b. È quanto, di una proporzione, noi diciamo che si ha *invertendo* i rapporti.

c. È quello che noi diciamo *componendo*; letteralmente è: « Composizione di ragione è ».

d. Letteralmente sarebbe piuttosto: « quando si prenda in considerazione l'antecedente insieme al conseguente, come fossero un solo termine, in rapporto al conseguente preso per sé stesso ».

e. È quello che noi diciamo *scomponendo*. Il termine letterale è *divisione* (διαίρεσις) di *ratio*, di rapporto.

f. Letteralmente: quando si prenda l'eccesso per cui l'antecedente supera il conseguente.

g. Letteralmente: date più grandezze ed altre uguali ad esse per numero, le quali vengano prese a due a due e nella stessa grandezze la prima stia all'ultima come delle seconde grandezze la prima sta all'ultima; o altrimenti: è il prendere in considerazione gli estremi con omissione dei medi [7].

XVIII. Date tre grandezze ed altre grandezze in ugual numero, si ha una proporzione perturbata quando avviene che, delle prime grandezze, la prima sta alla seconda come delle seconde grandezze la seconda sta alla terza, mentre, delle prime grandezze, la seconda sta alla terza come delle seconde la prima sta alla seconda.

ragione, si ha ragione δι' ἴσου (rapporto *ex aequo*, insomma *ex aequali distantia* – come propone Heath) quando delle prime grandezze...

[7] Date le sei grandezze:

$$\begin{matrix} A & B & C \\ D & E & F \end{matrix}$$

tali che valgano le proporzioni fra termini *vicini*:

$$A : B = D : E$$
$$B : C = E : F$$

si dice che la proporzione fra termini *lontani*:

$$A : C = D : F$$

si ricava *ex aequo* dalle altre due.

Che effettivamente valga l'ultima proporzione scritta, cioè che si possa effettivamente operare la deduzione *ex aequo*, viene dimostrato nella V, 22.

Nella def. XVIII si tratta di una deduzione analoga: soltanto è diverso l'ordine dei termini nelle proporzioni. Dalle proporzioni (valide per ipotesi):

$$A : B = E : F$$
$$B : C = D : E$$

si ricava quella *perturbata*:

$$A : C = D : F$$

Che effettivamente quest'ultima proporzione possa dedursi viene dimostrato nella V, 23.

Libro VII

DEFINIZIONI

I. Unità è ciò secondo cui ciascun ente è detto uno [1].

II. Numero è una pluralità composta da unità [2].

III. Un numero è « parte » di un [altro] numero, il minore di quello maggiore, quando esso misuri il maggiore (= lo divida) [3].

[1] Questa *definizione* di unità sembra alludere ad una sorta di *idea* platonica. Ogni singola cosa è detta « una » se è in relazione con l'« unità » (saremmo quasi tentati di dire: se *partecipa* dell'idea dell'unità).

[2] Da questa definizione si rileva che « numeri » sono per Euclide esclusivamente i numeri interi, allo studio dei quali si rivolgono appunto i libri aritmetici (settimo, ottavo e nono). Già nella nota introduttiva a questi libri abbiamo richiamato l'attenzione sul fatto che i numeri interi sono per Euclide particolari grandezze del libro quinto, tutte commensurabili tra loro. I *numeri*, infatti, soddisfano alle condizioni espresse dalle definizioni terza e quarta del libro quinto (sono cioè *omogenei*, e soddisfano al postulato di Archimede).

[3] Un primo numero è *parte* di un secondo se lo misura (divide), cioè se è un suo sottomultiplo: il secondo numero è quindi multiplo del primo.

Per esempio, 2 è *parte* di 6. Nella seguente definizione quarta si parla invece di *parti*, al plurale. Detta definizione è data in forma negativa: un primo numero è *parti* di un altro se *non lo divide*, cioè se non è sottomultiplo dell'altro. Si tratta di un'espressione abbreviata: *parti* sta per *somma di parti uguali*. Così, per esempio, mentre 2 (come s'è detto) è *parte* di 6, il numero 4, invece, è *parti* di 6, perché non divide 6. Ma si può porre 4 sotto la forma:

$$4 = 2 + 2$$

ossia 4 è somma di (due) parti uguali a 2. Se i due numeri sono primi tra loro, occorrerebbe considerare anche l'unità come *parte* di ciascun numero. Per esempio, 3 è *parti* di 7 cioè:

$$3 = 1 + 1 + 1$$

Ma effettivamente nella definizione VII, 2 si esclude che l'unità venga considerata come numero: quest'ultimo è infatti una pluralità (πλῆθος) composta da unità.

IV. È «parti» invece di un numero, quando non lo misuri (= non lo divida).

V. Un numero maggiore è multiplo di un numero minore, quando sia misurato (= sia diviso) dal minore.

VI. Numero pari è quello che è divisibile in due parti (= numeri) uguali.

VII. Numero dispari è quello che non è divisibile in due parti (= numeri) uguali, ossia quello che differisce di un'unità da un numero pari.

VIII. Numero parimente pari è quello che è misurato (= è diviso) da un numero pari secondo un numero pari[4].

IX. Numero parimente dispari è quello che è misurato (= è diviso) da un numero pari secondo un numero dispari.

X. Numero disparimente dispari è quello che è misurato (= è diviso) da un numero dispari secondo un numero dispari.

[4] Diamo qualche esempio riguardante le definizioni 8, 9, 10.

Il numero 4 è parimente pari, perché se viene diviso per il numero pari 2, dà il quoziente pari 2.

Il numero 10 è parimente dispari, perché se vien diviso per il numero pari 2 dà il quoziente dispari 5.

Ma un numero può essere al tempo stesso parimente pari e parimente dispari: così è ad esempio 12, che diviso per 2 dà il quoziente pari 6, mentre diviso per 4 dà il quoziente dispari 3.

Nelle proposizioni 32 e 33 del libro nono vengono specificati quali sono i numeri che appartengono *esclusivamente* all'una o all'altra categoria. Precisamente, viene ivi mostrato che le potenze di base 2, a partire da 4, sono soltanto *parimente pari*, mentre sono soltanto *parimente dispari* quei numeri che, divisi per 2, dànno un quoziente dispari. Nella seguente proposizione IX, 34, poi, si mostra che qualunque numero pari che non sia compreso in nessuna delle due categorie indicate nella IX, 32 e nella IX, 33 è al tempo stesso *parimente pari* e *parimente dispari*.

Finalmente la definizione VII, 10 introduce i numeri *disparimente dispari*: sono quelli che, divisi per un numero dispari, dànno un quoziente dispari: ad esempio 15, che, diviso per 3, dà il quoziente 5.

XI. Numero primo è quello che è misurato (= è diviso) soltanto dall'unità [a] [5].

XII. Numeri primi fra loro sono quelli che hanno soltanto l'unità come misura (= divisore) comune [b].

XIII. Numero composto è quello che è misurato da (= ha per divisore) un qualche numero [6].

XIV. Numeri composti fra loro sono quelli che hanno un qualche numero come misura comune (= hanno un numero per divisore comune).

XV. Si dice che un primo numero moltiplica un secondo numero, quando si ottenga un terzo numero componendolo con la somma di tante volte il secondo per quante sono le unità del primo.

XVI. Quando due numeri, moltiplicandosi fra loro, producano un terzo numero, il prodotto si chiama numero piano, ed i numeri che si moltiplicano fra loro si chiamano i suoi « lati ».

a. Letteralmente, come sempre d'ordinario: *da una unità*; usiamo, in traduzione, dall'unità, l'unità, ecc., qui ed in séguito, per nostra normale consuetudine.

b. Letteralmente: quelli che sono misurati soltanto da una unità come misura comune; ciò vale pure per la XIV[a].

[5] Numero primo è per Euclide quello che è misurato (= diviso) soltanto dall'unità. Cioè non viene considerato il numero primo come diviso anche da sé stesso.

Probabilmente si tratta di una definizione entrata nell'uso, e mantenuta forse per un motivo di indole storico-tradizionale negli *Elementi*, poiché effettivamente Euclide ammette che un numero misuri sé stesso (ad esempio nella proposizione VII, 2, dove di un numero si dice che μετρεῖ καὶ ἑαυτόν, cioè « misura anche sé stesso »).

[6] Anche qui, e nella seguente def. 14, viene nettamente separata *l'unità* dai *numeri*, come, del resto, nella def. 2. Viene, infatti, esclusa l'unità sia come divisore, sia come quoziente. Un numero si dice composto se è misurato da un qualche numero: numero che è quindi diverso dall'unità, e che è anche diverso dal numero stesso (si avrebbe allora l'unità come quoziente).

Soltanto nella precedente defin. 11 di numero primo, si considera la possibilità che un numero venga misurato dall'unità: il confronto tra le due def. 11 e 13 mostra però chiaramente che l'unità non è considerata come numero.

XVII. Quando tre numeri, moltiplicandosi fra loro, producano un quarto numero, il prodotto si chiama numero solido, ed i numeri che si moltiplicano fra loro si chiamano i suoi « lati »[7].

XVIII. Numero quadrato è quello che è prodotto di due numeri uguali, ossia è un numero piano che ha per lati due numeri uguali.

XIX. [Numero] cubo è quello che è prodotto di tre numeri uguali, ossia è un numero solido che ha per lati tre numeri uguali.

XX. [Quattro] numeri sono in proporzione quando, a seconda che il primo sia multiplo, sottomultiplo, o una frazione qualunque del secondo numero, corrispondentemente il terzo sia lo stesso multiplo, o lo stesso sottomultiplo, o la stessa frazione del quarto[8].

[7] È strana la dicitura iniziale delle due def. 16 e 17: sembra quasi che si metta in dubbio il fatto che se due, o tre, numeri si moltiplichino tra loro essi diano origine ad un nuovo numero loro *prodotto*.

È opportuno anche, con riferimento alla def. 15 di moltiplicazione: « Si dice che un primo numero moltiplica un secondo... » osservare che il *primo numero* funge da moltiplicatore, il secondo da moltiplicando.

Infatti, sempre nella def. 15, è detto che il *terzo numero* (il prodotto) si compone « con la somma di tante volte il secondo quante sono le unità del primo ».

Si osservi inoltre che un numero piano può essere espresso in modi diversi come prodotto dei suoi *due lati*; così:

$$12 = 3 \cdot 4 = 6 \cdot 2$$

Analogamente per i numeri *solidi*. Così: $24 = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot = 6 \cdot 2 \cdot 2$. Di più, lo stesso numero può essere insieme considerato come piano e come solido: così il numero *solido* 24 può essere considerato anche come *piano*:

$$24 = 4 \cdot 6 = 8 \cdot 3 = 12 \cdot 2$$

Si tratta, a quanto sembra, di quella concezione dei *numeri figurati* di origine pitagorica: anello fondamentale dell'aritmo-geometria, che costituì forse la base della matematica pitagorica in un primo periodo. È evidente, infatti, il legame tra numeri piani e rettangoli, e tra numeri solidi e parallelepipedi. Analogamente per i casi particolari dei numeri quadrati e cubi (def. 18 e 19).

[8] È, questa la definizione di proporzione tra quattro numeri. Essa si divide in tre casi: 1) che il primo e il terzo numero siano equimultipli rispettivamente del secondo e del quarto; 2) che il secondo e il quarto numero sono equimultipli rispettivamente del primo e del terzo (caso essenzialmente identico al primo); 3) che il primo e il terzo numero siano

XXI. Numeri piani e solidi simili [fra loro] sono quelli che hanno i lati proporzionali[9].

la stessa frazione m/n rispettivamente del secondo e del quarto. Si tratta cioè di quei casi particolari della definizione quinta del libro quinto, che Euclide ha già trattato nelle proposizioni introduttive del libro quinto stesso, con riferimento al caso del rapporto intero e del rapporto razionale:

$$ma : a = mb : b$$

e:

$$ma : na = mb : nb$$

Si delinea così meglio il collegamento tra libro quinto e libro settimo: quest'ultimo considera quelle particolari grandezze (tutte commensurabili tra loro) che sono costituite dai numeri (interi).

Per applicare la definizione (VII, 20) di proporzione tra numeri, basta trovare una sola coppia di numeri m, n tali che si abbia insieme

$$a = n/m\ b\ ; \qquad c = n/m\ d$$

ossia: $ma = nb$ e insieme: $mc = nd$.

Ma c'è ancora rispondenza con la definizione quinta del libro quinto (di proporzione tra grandezze, commensurabili o incommensurabili che siano a due a due). Infatti nel caso commensurabile la def. 5 del libro V (cfr. nota ivi) è sovrabbondante; basta trovare *una* coppia di numeri m, n per i quali si verifichino contemporaneamente le due uguaglianze:

$$ma = nb \qquad mc = nd$$

perché si possa concludere che le quattro grandezze siano a due a due nello stesso rapporto, cioè siano in proporzione.

[9] Ad esempio, sono *simili* i due numeri *piani*

$$6 = 2 \cdot 3 \quad \text{e} \quad 24 = 4 \cdot 6$$

Infatti i *lati* 2 e 3 dell'uno e i lati 4 e 6 dell'altro sono in proporzione:

$$2 : 4 = 3 : 6$$

Così son *simili* i due numeri *solidi*:

$$24 = 2 \cdot 3 \cdot 4 \quad \text{e} \quad 192 = 4 \cdot 6 \cdot 8$$

Infatti:

$$2 : 4 = 3 : 6 = 4 : 8$$

Caso particolare di numeri piani simili sono due numeri quadrati (cfr. libro X, lemma I alla prop. 29).

Infatti:

$$a^2 = a \cdot a \qquad b^2 = b \cdot b$$

e si ha:

$$a : b = a : b.$$

Analogamente per i numeri cubi.

XXII. Numero perfetto è quello che è uguale alla somma delle proprie parti (= dei suoi divisori)[10].

[10] Ad esempio, il numero 6 è perfetto. Infatti i suoi divisori sono 1, 2, 3, la cui somma è appunto uguale al numero:

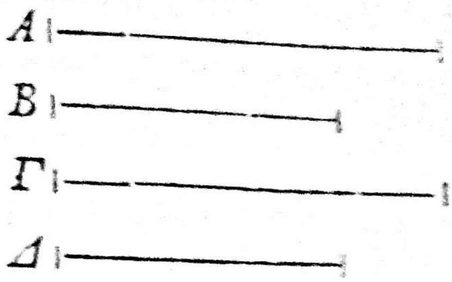
$$1 + 2 + 3 = 6$$

Così pure 28 è perfetto ($1 + 2 + 4 + 7 + 14 = 28$).

Come si vede, in questa definizione l'unità va compresa tra i divisori, mentre va escluso il numero dato.

1 Il rapporto tra loro delle grandezze date risulta dato.

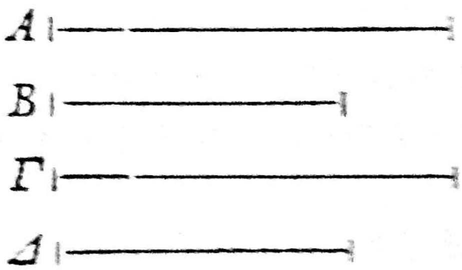
Siano grandezze date A, B: dico che il rapporto di A rispetto a B è dato.



Poiché infatti A risulta data, è possibile produrne una uguale ad essa. Sia stata prodotta e sia Γ. Di nuovo, poiché B è data, è possibile produrne una uguale ad essa. Sia stata prodotta e sia Δ. Poiché dunque A è uguale a Γ, e B a Δ, è quindi come A rispetto a Γ, così B rispetto a Δ: alternando come A rispetto a B, così Γ rispetto a Δ. Il rapporto di A rispetto a B è quindi dato – risulta infatti prodotto quello di Γ rispetto a Δ identico ad esso –.

2 Qualora una grandezza data rispetto ad una certa altra grandezza abbia rapporto dato, anche quella risulta data in grandezza.

Una grandezza data A rispetto ad una certa altra grandezza B abbia infatti rapporto dato: dico che anche B risulta data in grandezza.



Poiché infatti A risulta data, è possibile produrre una uguale ad essa. Sia stata prodotta e sia Γ. E poiché il rapporto di A rispetto a B risulta dato – così è infatti stato supposto – è possibile produrne uno identico ad esso. Sia stato prodotto e sia il rapporto di Γ rispetto a Δ. E poiché è come A rispetto a B, così Γ rispetto a Δ, alternando quindi è come A rispetto a Γ, così B rispetto a Δ. Ed A è uguale a Γ: anche B è quindi uguale a Δ: la grandezza B risulta quindi data – risulta infatti prodotta Δ uguale ad essa –.

3 Qualora quante si vogliano grandezze date siano composte, anche quella composta da esse sarà data.

Siano infatti state composte quante si vogliano grandezze date AB, ΓΔ: dico che anche quella composta di AB, ~~ΓΔ~~ BΓ, <cioè> A~~Δ~~Γ, è data.