L'*Algebra* di Alkhwarizmi (813-833)

I found that the numbers which are needed in the calculus (*ḥisāb*) of *al-jabr* and *al-muqābala*, are of three types*, namely: roots, *squares*, and the simple number, [I-17] which is not related either to a root or to a *square*.

Among these types, the root is everything which is multiplied by itself, from the unity [i.e. the one], to the numbers above it, and the fractions below it.

The *square* is what is obtained [H-3r] when the root is multiplied by itself.

The simple number is any uttered number that is not related either to a root or to a *square*.

Root = شَيْء (shay) = cosa
Square = مَال (mal) = capitale
Number = عَدَد (adad)

L'incognita indica una quantità indeterminata (nel valore e nella natura): la *cosa* non è un oggetto ignoto, bensì un'entità certamente esistente, ma che può essere qualsiasi: una sorta di assoluto onnicomprensivo, ma sommamente indefinito, come potrebbe essere Allah. Tuttavia il nome dato al quadrato rivela l'origine economico-giuridica dell'esigenza di introdurre procedure di calcolo generale, atte a risolvere, principalmente, problemi di divisione ereditaria, secondo le regole di ripartizione indicate nel Corano.

I have found that these three types – roots, *squares* and a number – combine with one another, and we have the three kinds of combination, which are: *squares* plus roots [B-62r] are equal to a number; *squares* plus a number are equal to roots; roots plus a number are equal to *squares*.[8]

quadrati uguali a radici	$ax^2 = bx$
quadrati uguali a numeri	$ax^2 = c$
radici uguali a numeri	$bx = c$
quadrati e radici uguali a numeri	$ax^2 + bx = c$
quadrati e numeri uguali a radici	$ax^2 + c = bx$
radici e numeri uguali a quadrati	$bx + c = ax^2$

La classificazione delle equazioni è astratta, a priori, e combinatoria (di ispirazione lessicografica). I primi tre tipi erano stati precedentemente considerati dall'autore come *semplici*, e sostanzialmente equivalenti, in quanto risolubili immediatamente con facili operazioni aritmetiche (divisione o estrazione di radice). I procedimenti indicati nel titolo, *completamento* (الجَبْر) e *bilanciamento* (المقابله) sono coinvolti unicamente in presenza di tre termini.

"*Squares* **plus roots are equal to a number**", as when you say: a *square* plus ten roots are equal to thirty-nine dirhams; namely, if you add to any *square* <a quantity> equal to ten of its roots, the total will be thirty-nine.

Procedure: you halve the number of the roots[9] [I-19] which, in this problem, yields five; you multiply it by itself; the result is twenty-five; you add it to thirty-nine; the result is sixty-four; you take the root, that is eight, from which you subtract half of the number of the roots, which is five. The remainder is three, that is the root of the *square* you want, and the *square* is nine.[10]

L'equazione proposta è: $x^2 + 10x = 39 \quad (x^2 + px = q)$. La procedura consta dei seguenti passi:

$$\frac{10}{2} = 5 \rightarrow 5^2 = 25 \rightarrow 25 + 39 = 64 \rightarrow \sqrt{64} = 8 \rightarrow 8 - 5 = 3 = x$$

$$\frac{p}{2} \rightarrow \left(\frac{p}{2}\right)^2 \rightarrow \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q \rightarrow \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q} \rightarrow \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q} - \frac{p}{2} = x$$

Il procedimento – che oggi, ispirandoci al nome dell'autore dell'opera, chiameremmo *algoritmo* – benché riferito ad un esempio numerico preciso, è *generale*, e può essere applicato a qualunque equazione della medesima forma. Quella trattata in questo svolgimento deve, in altri termini, fungere da *modello* per altri problemi legati ad essa da una relazione di *analogia* (قياس, qiyas): l'operazione di ricondurre il quesito alla risoluzione proposta è assimilata a quella compiuta dai giuristi islamici per ricavare, dalle norme contenute nei testi sacri, quella che, pur non riferendosi ad un caso identico a quello da giudicare, possa comunque considerarsi ad esso applicabile, e dunque costituire la premessa maggiore del *sillogismo giuridico* avente come premessa minore il fatto commesso e come conclusione la sentenza. L'analogia serve dunque per innescare un meccanismo deduttivo o, se si preferisce, sintetico, che si conclude con la formulazione di un enunciato: un'equazione che esprime le relazioni fra quantità note ed ignote, e che offre il punto di partenza al procedimento *analitico* che estrapola, da questa forma implicita, i valori inizialmente indeterminati. Alla base del termine *procedure* utilizzato dal traduttore del testo in inglese si trova proprio la parola *qiyas*. Ecco un esempio di applicazione:

Si divida dieci in due parti, si moltiplichi ognuna con se stessa e si sommino i due prodotti. Il risultato è cinquantotto dirhams.

Il problema, attraverso i passaggi seguenti, viene ricondotto ad un'equazione del tipo *quadrati e numeri uguali a radici*.

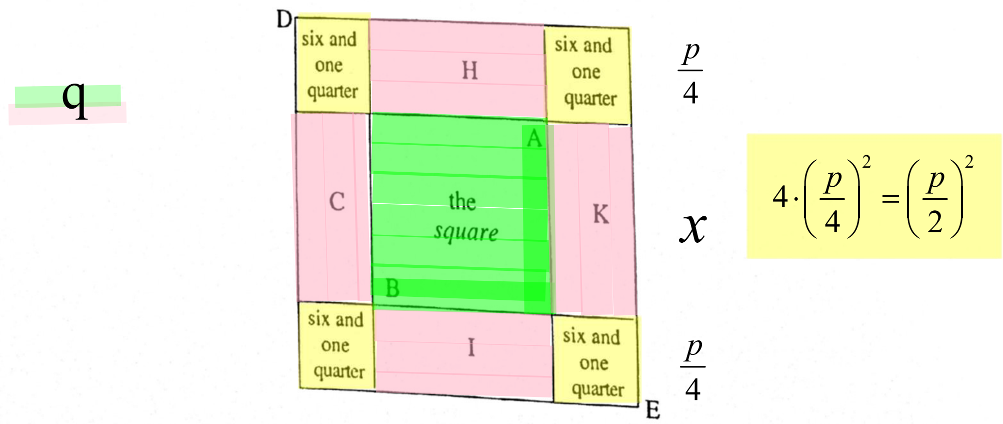
$$x \rightarrow 10 - x \rightarrow (10-x)^2 = 100 + x^2 - 20x \rightarrow 100 + x^2 - 20x + x \cdot x = 100 + 2x^2 - 20x = 58$$

$$\underset{(1)}{\rightarrow} 100 + 2x^2 = 58 + 20x \rightarrow 50 + x^2 = 29 + 10x \underset{(2)}{\rightarrow} 21 + x^2 = 10x.$$

Le operazioni (1) e (2) sono esempi di *completamento* e di *bilanciamento*, rispettivamente. Nel primo caso si ripristina la quantità mancante a primo membro (contrassegnata dal segno meno), nel secondo caso si elidono gli uni con gli altri gli elementi della stessa natura (i numeri con i numeri).

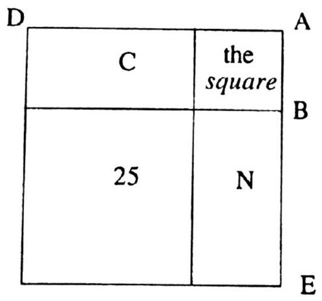
Fino a qui le manipolazioni e considerazioni riguardano unicamente la *forma* (intesa come struttura combinatoria soggetta a regole sintattiche): si prescinde totalmente da qualsivoglia sostanza (semantica, logica) soggiacente. La questione va oltre la superficie quando l'autore passa a cercare il fondamento dei suoi procedimenti, quello che va sotto il nome di *causa* (عِلَّة, ailla), ossia del *perché* l'algoritmo funzioni (indagine che non si riduce, semplicemente, alla verifica del fatto che il risultato ottenuto soddisfi le condizioni richieste). Tale fondamento viene reperito nella geometria euclidea e proposto mediante opportune figure, facenti riferimento a relazioni tra grandezze (aree o lunghezze). Così prosegue il discorso riguardante la risoluzione dell'equazione $x^2 + 10x = 39$:

We have divided the ten roots into two halves, and we have multiplied half of ten by itself, and added <the result> to the number, which is thirty-nine, in order that we complete the construction of the largest surface by what its four angles lacked. Since, if we multiply one-quarter of a number by itself, and then by four, the product will be equal to that of multiplying its half [B-64r] by itself. Thus, we have contented ourselves with the multiplication of half of the number of the roots by itself, instead of one-quarter by itself and then by four.[15] Here is its figure:



There is also another figure which leads to this. Let there be the surface *AB*, which is the *square*; and we wish to add to it ten roots. We divide ten into two halves; the result will be five, of which we make two surfaces on both sides of the surface *AB*. Let these two surfaces be *C* and *N*; the length of each of the two surfaces will be five cubits, which is half of the ten roots,[16] and their width is equal to a side of the surface *AB*. What is left is a square, from one of the angles of the surface *AB*, which is five by five. [H-

6v] and five, and is half of the ten roots[17] that we have added on either side of the first surface. We now know that the first surface is the *square*, and that the two surfaces on either side of it are its ten roots; all of this is thirty-nine. To complete the larger surface [O-4v] there remains the square of five by five – that is twenty-five – which we add to thirty-nine, in order to complete the larger surface, which is the surface *DE*. All this adds up to sixty-four; we take its root, which is eight, and is one of the sides of the larger surface. If we subtract from it a quantity equal to what we have added to it, which is five, then three remain, which is the side of the surface *AB* – that is the *square* – three is its root, and the *square* is nine.[18] Here is its figure:



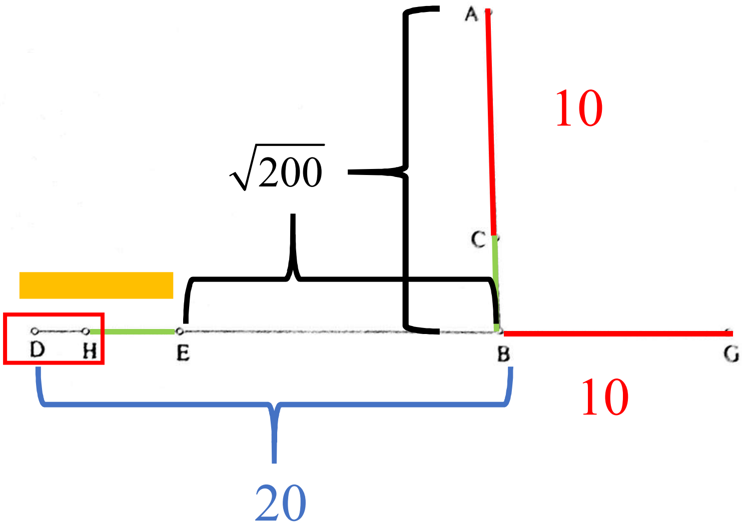
Si badi bene che il riferimento alla geometria non è una *dimostrazione* di proprietà riguardanti le figure: ad esempio, per avere quella su cui si fonda la seconda versione del ragionamento, occorrerebbe riproporre [la Proposizione 4 del Libro II] degli *Elementi*, di cui il disegno rappresenta solo l'*enunciato*, mentre non ne contiene la *costruzione*.

Alla geometria Alkhuwarizmi ricorre anche, ove possibile, per dimostrare identità algebriche. Diamo due esempi.

1. $(20-\sqrt{200})-(\sqrt{200}-10)=\boxed{30-\sqrt{800}}.$

With regard to the cause of "the root of two hundred minus ten, subtracted from twenty minus the root of two hundred", here is its figure:

The line *AB* is the root of two hundred; from *A* [H-13r] to point *C* is ten, which is known. We produce a line from point *B* to point *D*, and we suppose that it is twenty. From point *B* to point *E*, we suppose <a line> equal to the line of the root of two hundred, which is equal to the line *AB*. It is clear that the line *CB* is what is left of the root of two hundred, once ten has been taken away; and the line *ED* is what is left of twenty, once the root of two hundred has been taken away. We want to subtract the line *CB* from the line *ED*. So we produce a line from point *B* to point *G*, which is equal to the line *AC*, which is ten. The whole of the line *GD* will therefore be equal to the line *GB* plus the line *BD*. Now, it is clear that all that is thirty. From the line *ED*, [B-69r] we cut <a line> equal to the line *CB*; that is, the line *EH*. It is clear that the line *HD* is what is left of the whole of line *GD*, which [I-34] is thirty; and it is clear that the line *BE* is the root of two hundred, and the line *GB* plus *BC* is also the root of two hundred. Since the line *EH* has become equal to the line *CB*, it will be clear that what has been subtracted from the line *GD*, which is thirty, is two roots of two hundred. But two roots of two hundred is the root of eight hundred. This is what we wanted to demonstrate, and here is its figure:

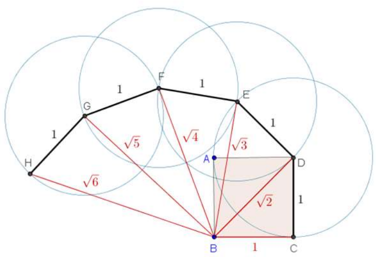


2. $(100+x^2-20x)+(50+10x-2x^2)=150-10x-x^2$.

With regard to "one hundred plus one *square* minus twenty roots, [H-13v] to which we add fifty plus ten roots minus two *squares*", no figure fits it, for it is composed of three [O-9r] different genera:[28] [A-8r] *squares*, roots, and number; and these do not have an equal that corresponds with them in order that they are represented by a figure. We can have a figure for them, <but> not a sensible one. As for its necessity, it is obvious from the expression. Given that you know that you have one hundred plus one *square* minus twenty roots. And, since you have added to it fifty plus ten roots, you have fifty plus one *square* minus ten roots, for these added ten roots have restored ten roots from the twenty subtractive roots. Thus, one hundred and fifty plus one *square* minus ten roots remain. And, there was a *square* with the hundred; hence, once you have subtracted from one hundred plus one *square* the two *squares* that are taken away from fifty, one *square* goes away with one *square*, and you have one *square* left. Therefore, the result is one hundred and fifty minus one *square*, minus ten roots; and this is what we wanted to demonstrate.

Nel momento in cui sono presenti tre *specie* (ossia gli elementi considerati sono *di tre diversi generi*, (secondo il termine di stampo biologico, من ثلاثة أجناس مختلف) la dimostrazione geometrica non è più praticabile (non esiste un terzo ente, aggiuntivo rispetto alla lunghezza e all'area, che possa rappresentare il numero, non esiste una terza dimensione, almeno non nel piano della pagina). Nel secondo esempio, la dimostrazione avviene per *espressione*, ossia utilizzando le proprietà dell'algebra. Le espressioni algebriche, con le parti di cui si compongono, diventano allora veri e propri oggetti di studio, autonomi rispetto al ruolo svolto all'interno di un'equazione ed anche rispetto a qualsivoglia riferimento a figure. Come queste ultime possiedono una propria struttura, analizzabile e manipolabile, sottoponibile a trasformazioni di *forma* che non ne alterano il *contenuto* (esattamente come avviene con i quadrati, i rettangoli, gli gnomoni, che vengono utilizzati come pezzi di un rompicapo che, divisi e riuniti, disposti in vario modo, danno origine a diverse configurazioni, tutte aventi la stessa area). Le espressioni conoscono le proprie regole di trasformazione, e a queste Alkhwarizmi dedica apposite sezioni della sua opera, in cui, ad esempio, enuncia le regole per la moltiplicazione e la divisione delle radici quadrate dei numeri, sia che queste siano *note* (razionali, مَعْلُوم) sia che siano *sorde* (irrazionali, أَصَمّ). Nella contrapposizione tra questi due termini, che non sono semanticamente uno il contrario dell'altro, si rivela ancora una volta la distinzione tra aritmetica (determinazione di una soluzione tramite l'applicazione di operazioni, di cui non v'è più traccia nell'espressione del risultato) ed algebra (in cui le quantità sono descritte indirettamente, attraverso la loro relazione con altre, e quindi sono, di per sé, *inesprimibili*, in quanto non esplicitabili, attraverso entità linguistiche autonome, mediante *nomi*). Si consideri, a questo proposito, la differenza tra 2 e $\sqrt{3}$, o tra $x+1$ e $\sqrt{x-2}$. Qui sembra emergere un aspetto linguistico, che è messo in maggiore evidenza dall'uso che della parola *esprimibile* fa Euclide. Nella Definizione III del Libro X si legge: *Sia dunque chiamata esprimibile* (ρητός) *la retta proposta, ed esprimibili le rette commensurabili con questa, sia che lo siano in lunghezza sia che lo siano in potenza soltanto*.

Per Euclide, esprimibile è dunque anche una retta tale che il quadrato su di essa costruito sia il triplo del quadrato costruito sulla retta proposta: in questo caso la commensurabilità è in potenza, e corrisponde, però, ad una lunghezza pari a $\sqrt{3}$. La sua esprimibilità è possibile all'interno del linguaggio geometrico (tramite la costruzione del lato di un quadrato che abbia area tripla rispetto a quello assegnato): si ottiene un segmento che esplicita, in maniera autonoma, quel rapporto tra aree, che è riconducibile ad un numero. Questa possibilità non esiste nel linguaggio algebrico. Ad essere qui posti a confronto sono davvero due ambiti linguistici, non rispetto ai segni di cui si compongono, ma rispetto ai significati che possono esprimere. Ed è su questi che si basano le dimostrazioni presentate sopra (geometrica ed algebrica), che non scavano dentro un impianto logico soggiacente, bensì sfruttano il contenuto semantico-strutturale di figure e quantità, ossia il modo in cui questi oggetti si compongono delle loro parti presentate nell'enunciato. In questo senso, si può dire che Alkhuwarizmi, nelle sue argomentazioni, faccia della geometria un uso analogo a quello dell'algebra: la tratta come una dottrina priva di un inquadramento teorico, che possiede verità, ma derivanti da teoremi che, se esistenti, rimangono invisibili.



specie esistenti

Dalla Prefazione all'*Aritmetica* di Diofanto (trad. latina di P. Tannery, 1893)

tralasciate

Καὶ τῶν πολλαπλασιασμῶν σοι σαφηνισθέντων, φανεροί εἰσιν οἱ μερισμοὶ τῶν προκειμένων εἰδῶν. καλῶς οὖν ἔχει ἐναρχόμενον τῆς πραγματείας συνθέσει καὶ ἀφαιρέσει καὶ πολλαπλασιασμοῖς τοῖς περὶ τὰ εἴδη γεγυμνάσθαι, καὶ πῶς εἴδη ὑπάρχοντα καὶ λείποντα μὴ ὁμοπληθῆ προσθῇς ἑτέροις εἴδεσιν, ἤτοι καὶ αὐτοῖς ὑπάρχουσιν, ἢ καὶ ὁμοίως ὑπάρχουσι καὶ λείπουσι, καὶ πῶς ἀπὸ ὑπαρχόντων εἰδῶν καὶ ἑτέρων λειπόντων ὑφέλῃς ἕτερα ἤτοι ὑπάρχοντα, ἢ καὶ ὁμοίως ὑπάρχοντα καὶ λείποντα.

Μετὰ δὲ ταῦτα ἐὰν ἀπὸ προβλήματός τινος γένηται εἴδη τινὰ ἴσα εἴδεσι τοῖς αὐτοῖς, μὴ ὁμοπληθῆ δέ, ἀπὸ ἑκατέρων τῶν μερῶν δεήσει ἀφαιρεῖν τὰ ὅμοια ἀπὸ τῶν ὁμοίων, ἕως ἂν ἓν εἶδος ἑνὶ εἴδει ἴσον γένηται. ἐὰν δέ πως ἐν ὁποτέρῳ ἐνυπάρχῃ ἢ ἐν ἀμφοτέροις ἐν ἐλλείψεσί τινα εἴδη, δεήσει προσθεῖναι τὰ λείποντα εἴδη ἐν ἀμφοτέροις τοῖς μέρεσιν, ἕως ἂν ἑκατέρων τῶν μερῶν τὰ εἴδη ἐνυπάρχοντα γένηται, καὶ πάλιν ἀφελεῖν τὰ ὅμοια ἀπὸ τῶν ὁμοίων, ἕως ἂν ἑκατέρῳ τῶν μερῶν ἓν εἶδος καταλειφθῇ.

Φιλοτεχνείσθω δὲ τοῦτο ἐν ταῖς ὑποστάσεσι τῶν προτάσεων, ἐὰν ἐνδέχηται, ἕως ἂν ἓν εἶδος ἑνὶ εἴδει ἴσον καταλειφθῇ· ὕστερον δέ σοι δείξομεν καὶ πῶς δύο εἰδῶν ἴσων ἑνὶ καταλειφθέντων τὸ τοιοῦτον λύεται.

Νῦν δ' ἐπὶ τὰς προτάσεις χωρήσωμεν ὁδόν, πλείστην ἔχοντες τὴν ἐπ' αὐτοῖς τοῖς εἴδεσι συνηθροισμένην ὕλην. πλείστων δ' ὄντων τῷ ἀριθμῷ καὶ μεγίστων τῷ ὄγκῳ, καὶ διὰ τοῦτο βραδέως βεβαιουμένων ὑπὸ

6 προσθήσεις B. 9 ὑφέλῃς A, ἀφαιρήσεις B. 12 εἴδη τινὰ ἴσα] ὕπαρξις *Ba*. 15/16 ἐν ἐλλείψεσι] ἐνελλείψῃ *Ba*. 21 φιλο-

Tibi explicatis multiplicationibus, manifestae sunt divisiones propositarum specierum; at bene erit hunc, qui talia tractare incepit, in additione, subtractione, multiplicatione specierum exercitatum esse. Species quoque positas et negatas sub variis coefficientibus sciat addere aliis speciebus sive positis sive similiter positis et negatis et a speciebus positis et negatis alias subtrahere sive positas, sive similiter positas et negatas. Def. X

Deinde, si a problemate aliquo provenit aequatio inter species aliquas et easdem species sub variis coefficientibus, ab utraque parte oportebit auferre similia a similibus, donec fiat una species aequalis uni speciei. Si autem aliquo modo positae sint quaedam species in negatione vel in alterutra parte, vel utrimque, oportebit utrimque addere species negatas, donec in utraque parte fiant species tantum positae, et rursus auferre similia a similibus, donec in utraque parte una tantum species remaneat. Def. XI

Ad hoc igitur studiose exercita te ipsum in aequationibus problematum, et eas reduce, quantum fieri poterit, donec remaneat una species uni speciei aequalis; posterius tibi ostendemus quomodo solvitur quaestio, si remanent duae species quarum summa uni speciei aequalis sit.

Nunc ad propositiones ipsas ingrediamur viam, maximam habentes ex speciebus ipsis congestam materiam. Quum vero plurima sint numero, moleque amplissima, tarde retinentur ab iis quibus traduntur

τεχνήσθω *Ba*. 26 τοῖς om. *Ba*. 27 τῷ ἀριθμῷ] τῶν ἀριθμῶν A B. 28 καὶ om. *Ba*.

Una volta che ti sono state spiegate le moltiplicazioni, risultano chiare le divisioni delle **specie** proposte; e sarà dunque bene che colui il quale intenda affrontare tale argomento, sia pratico nell'addizione, sottrazione, moltiplicazione delle specie. Occorre che sappia anche sommare le specie poste e negate sotto vari coefficienti ad altre specie sia poste, sia similmente poste e negate, e sottrarre, dalle specie poste e negate, altre, sia poste, sia similmente poste e negate.

Quindi, se da qualche problema deriva un'equazione tra determinate specie e le stesse specie sotto vari coefficienti, da entrambe le parti occorre sottrarre le simili dalle simili, in modo tale che una specie sia uguale ad un'unica specie. Se però in qualche modo sono poste alcune specie in negazione, o in una delle due parti, o in entrambe, occorre sommare ad entrambe le specie negate, in modo che in entrambe le parti vi siano soltanto specie poste, e quindi sottrarre le simili dalle simili, in modo che da ogni parte rimanga soltanto una specie.

εἶδος = specie (aspetto, apparenza, idea) → FORMA

numero indeterminato → GENERALITÀ

Un *quadrato* (= x^2) è *δύναμις* ("potenza"), ed il suo segno è Δ con una *Y* sovrapposta, quindi Δ^Y.

Un *cubo* (= x^3) è *κύβος* ("cubo"), ed il suo segno K^Y.

Un *quadrato-quadrato* (= x^4) è *δυναμοδύναμις* ("potenza-potenza"), ed il suo segno è $\Delta^Y \Delta$.

Un *quadrato-cubo* (= x^5) è *δυναμόκυβος*, ("potenza-cubo") ed il suo segno è ΔK^Y.

Un *cubo-cubo* (= x^6) è *κυβόκυβος*, ed il suo segno $K^Y K$.

Altri simboli usati nell'***Arithmetica*** sono:

- $\overset{\circ}{M}$, che, seguito da un numero, indica il termine noto di un'equazione; questa notazione è formata dalle prime due lettere della parola *"monade"*, che significa *unità*.
- ⋔, il segno della sottrazione;
- ἰ^σ, il segno uguale. ἰσότης ἴσωσις

κυβος καὶ ἔστιν αὐτοῦ σημεῖον δύο κάππα ἐπίσημον ἔχοντα Υ, $K^Y K$ κυβόκυβος.

ὁ δὲ μηδὲν τούτων τῶν ἰδιωμάτων κτησάμενος, ἔχων δὲ ἐν ἑαυτῷ πλῆθος μονάδων ἀόριστον, ἀριθμὸς καλεῖται καὶ ἔστιν αὐτοῦ σημεῖον τὸ ς.

ἔστι δὲ καὶ ἕτερον σημεῖον τὸ ἀμετάθετον τῶν ὡρισμένων ἡ μονὰς καὶ ἔστιν αὐτῆς σημεῖον τὸ M ἐπίσημον ἔχον τὸ O, $\overset{\circ}{M}$.

Ὥσπερ δὲ τῶν ἀριθμῶν τὰ ὁμώνυμα μόρια παρομοίως καλεῖται τοῖς ἀριθμοῖς, τοῦ μὲν τρία τὸ τρίτον, τοῦ δὲ τέσσαρα τὸ τέταρτον, οὕτως καὶ τῶν νῦν ἐπονομασθέντων ἀριθμῶν τὰ ὁμώνυμα μόρια κληθήσεται παρομοίως τοῖς ἀριθμοῖς·

τοῦ μὲν ἀριθμοῦ,	τὸ ἀριθμοστόν,
τῆς δὲ δυνάμεως,	τὸ δυναμοστόν,
τοῦ δὲ κύβου,	τὸ κυβοστόν,
τῆς δὲ δυναμοδυνάμεως,	τὸ δυναμοδυναμοστόν,
τοῦ δὲ δυναμοκύβου,	τὸ δυναμοκυβοστόν,
τοῦ δὲ κυβοκύβου,	τὸ κυβοκυβοστόν·

ἕξει δὲ ἕκαστον αὐτῶν ἐπὶ τὸ τοῦ ὁμωνύμου ἀριθμοῦ σημεῖον γραμμὴν ⨯ διαστέλλουσαν τὸ εἶδος.

Ἐκθέμενος οὖν σοι τὴν ἑκάστου τῶν ἀριθμῶν ἐπωνυμίαν, ἐπὶ τοὺς πολυπλασιασμοὺς αὐτῶν μεταβήσομαι· ἔσονται δέ σοι καταφανεῖς διὰ τὸ προδεδηλῶσθαι σχεδὸν διὰ τῆς ὀνομασίας.

2 κυβόκυβος om. B. 4 ἑαυτῷ] αὐτῷ A. ἀόριστον, ἀριθμὸς Psellus. ἄλογος ς̀ AB (ἄλογον propos. Ba). 7 ὡρι-

Qui vero nullam talem proprietatem possidet, continet autem in seipso quantitatem unitatum indeterminatam, vocatur *arithmus* [incognitus] et huius signum est ς [x].

Est quoque aliud signum, quod in determinatis constans est, unitas, cuius signum est *M* habens *O* indicem: $\overset{\circ}{M}$[1]).

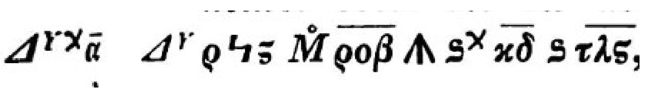
Quemadmodum numeris cognomines fractiones ali- Def. III
quotae a numeris derivative vocantur, a 3 triens $\left[\frac{1}{3}\right]$, a 4 quadrans $\left[\frac{1}{4}\right]$, ita cognomines numeris illis supra nominatis fractiones aliquotae ab illis numeris derivative vocabuntur.

Si denominator est x (arithmus), dicemus *arithmoston* $\left[\frac{1}{x}\right]$; si x^2 (dynamis), *dynamoston* $\left[\frac{1}{x^2}\right]$; si x^3 (cubus), *cuboston* $\left[\frac{1}{x^3}\right]$; si x^4 (dynamodynamis), *dynamodynamoston* $\left[\frac{1}{x^4}\right]$; si x^5 (dynamocubus), *dynamocuboston* $\left[\frac{1}{x^5}\right]$; si x^6 (cubocubus), *cubocuboston* $\left[\frac{1}{x^6}\right]$.

Habebit unaquaeque harum fractionum super signum cognominis numeri lineam ⨯ quae discernat speciem.

Exposita tibi uniuscuiusque numerorum appella- Def. IV
tione, ad multiplicationem illorum transeo. Erit tibi evidens, quum fere iam declarata fuerit ab ipsa appellatione.

L'espressione



si traduce in

$$\frac{1}{x^2} + 196x^2 + 172 - \frac{24}{x} - 336x,$$

α	β	γ	δ	ϵ	ϛ	ζ	η	θ	ι	κ	λ	μ	ν
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	20	30	40	50
ξ	ο	π	ϙ	ρ	σ	τ	υ	φ	χ	ψ	ω	ϡ	
60	70	80	90	100	200	300	400	500	600	700	800	900	


Arithmeticorum Liber II. 61

IN QVÆSTIONEM VII.

QVÆSTIO VIII.

OBSERVATIO DOMINI PETRI DE FERMAT.

Cubum autem in duos cubos, aut quadratoquadratum in duos quadratoquadratos & generaliter nullam in infinitum ultra quadratum potestatem in duos eiusdem nominis fas est dividere cuius rei demonstrationem mirabilem sane detexi. Hanc marginis exiguitas non caperet.

QVÆSTIO IX.

H iij