Gli *Elementi* di Euclide

Opera aritmetico-geometrica in 13 libri, si situa in un contesto (la Grecia classica, IV secolo a.C.), in cui scarsa era la circolazione di scritti matematici, a causa del ruolo marginale della materia nella formazione scolastica e al carattere essenzialmente privato ed elitario della ricerca, che era ristretta ad una piccola cerchia di studiosi. A ciò si deve anche la mancanza di biografie ufficiali dei matematici, che non erano considerati personaggi pubblici: le autorità delle città erano più propense a reclutare tecnici, come ingegneri ed architetti. Poche notizie ci sono pervenute anche sulla vita dello stesso Euclide, che, ciò malgrado, vari riscontri storici collocano nella città di Alessandria, dove potrebbe avere svolto attività di insegnamento. La sua generazione è probabilmente compresa fra quella dei discepoli di Platone e quella di Archimede.
Il trattato in questione si caratterizza per

- il sistematico uso della dimostrazione come concatenazione di deduzioni;
- l'ispirazione platonica, ravvisabile anche nel risultato finale dell'opera, la costruzione dei cinque solidi regolari;
- l'intento di raccogliere, organizzare e completare il contenuto del sapere matematico dell'epoca.

Il titolo

L'espressione greca *τά στοιχεία* indica gli *elementi* ed ha un preciso significato nella letteratura classica. Anzitutto denota un genere di manoscritto scientifico, che vuole presentare, in maniera semplice ed accessibile, il *corpus* di conoscenze riguardanti un determinato ambito. Rientrano in questa categoria la precedente omonima opera perduta di Ippocrate di Chio, i primi quattro libri delle *Coniche* di Apollonio (secondo quanto indicato nella prefazione), e l'*Equilibrio dei piani* di Archimede (che lo stesso autore cita spesso come *Elementi di Meccanica*). In maniera più specifica, riferita alla matematica, il termine è spiegato da Proclo, nel suo *Commento al Libro I degli Elementi di Euclide*, a cui si rinvia per i dettagli: il riferimento è al ruolo svolto da determinati teoremi nello sviluppo (inteso come costruzione e come diffusione) della conoscenza e nella sua applicazione. La stessa parola ricorre nei *Dialoghi* platonici in relazione alla struttura fondamentale del cosmo e alla sua creazione (vedi il fuoco, l'aria, la terra e l'acqua nel *Timeo*), ma anche in un passaggio rivelatore del *Filebo*: ad un certo punto, *στοιχείον* compare per denotare le lettere dell'alfabeto. Il brano in questione descrive l'opera del dio Thot, ideatore della scrittura, impegnato in una distinzione e classificazione fonetica dei grafemi (vocalici, consonantici, muti) all'interno dell'illimitata varietà dei suoni della voce. La nascita dell'alfabeto viene ancora una volta associata ad una pratica aritmetica e, più, in generale, alla matematica, tramite l'individuazione di concetti opportunamente predisposti a diventare oggetti di studio, ossia *μαθήματα*. È inoltre interessante notare come la figura leggendaria di *Ermete Trismegisto*, appartenente alla tradizione pre-classica, riunisca in sé le persone della citata divinità egizia e di Hermes, messaggero degli dei, associato alla comunicazione. Nel *Pimandro*, un libro inserito nel *Corpus Hermeticum*, opera di cui quel personaggio immaginario sarebbe autore, l'atto della creazione è fatto risalire al *λόγος*, termine dall'ampia valenza semantica, che comprende la *parola*, la *ragione*, il *rapporto*.

La struttura

Lo sviluppo dell'opera segue il processo di costruzione della conoscenza descritto da Aristotele nel Libro I degli *Analitici secondi*, e che, basandosi su ciò che è previamente noto, giunge al nuovo tramite la dimostrazione, l'unica versione scientifica della quale è costituita dal *sillogismo*.

Anzitutto vengono date le *definizioni* degli enti studiati nel corso della trattazione, distinte per ambito tematico, ed introdotte nei libri in cui trovano applicazione. A queste si aggiungono, all'inizio dell'opera, i *postulati* e le *nozioni comuni*.
Precisamente, le definizioni (dette *όροι, termini*) sono presenti nelle seguenti parti, con i contenuti qui sotto riportati:

- Libro I: punto, linee rette, superficie, angoli, figure poligonali e circonferenza
- Libro II: rettangolo
- Libro III: parti del cerchio e posizioni di una retta rispetto a un cerchio
- Libro IV: figure inscritte e circoscritte
- Libro V: proporzioni fra grandezze
- Libro VI: figure simili, sezione aurea, altezza di un parallelogramma
- Libro VII: numeri interi e loro proprietà rispetto al prodotto (in particolare: divisibilità)
- Libro X: commensurabilità e incommensurabilità fra grandezze, tipi di *rette irrazionali*
- Libro XI: figure solide

Questa suddivisione è rivelatrice di una separazione tra aritmetica e geometria assente nella matematica delle civiltà arcaiche (mesopotamica e babilonese). A tal proposito, Proclo spiega, riallacciandosi alla generalità invocata da Aristotele:

> *… perché molte proprietà permangono le stesse in cose differenti per specie, per esempio i due angoli retti in tutti i triangoli. E molte poi hanno lo stesso predicato, ma l'elemento comune in ciascuna di loro differisce per la specie, per esempio* ***la similitudine nelle figure e nei numeri****. Non si deve pertanto richiedere dal matematico un'unica dimostrazione di questi casi, perché i principii delle figure e quelli dei numeri non sono gli stessi, ma differiscono per il genere sostanziale.*

Le definizioni

Per comprendere la distinzione effettuata da Proclo, è sufficiente confrontare la Definizione V del Libro V con la Definizione XXI del Libro VII. In quest'ultima si considerano rapporti uguali quelli intercorrenti fra un primo e un secondo *numero* ed un terzo e quarto *numero*, rispettivamente, se entrambi i rapporti corrispondono allo stesso *numero*, intero o frazionario (ossia, sono espressi, nel nostro linguaggio, dallo stesso quoziente razionale). Nella prima definizione, che si riferisce alle

grandezze (misure di figure geometriche), l'uguaglianza di rapporti non è invece sempre riconducibile ad un numero razionale, in quanto viene contemplato il caso in cui esse dovessero risultare incommensurabili. Ciò porta ad una definizione ben più articolata, probabilmente tratta dalla teoria delle proporzioni attribuita ad Eudosso di Cnido (408-355 a.C.), allievo del pitagorico Archita di Taranto. Tali circostanze non impediscono che aritmetica e geometria permangano fittamente intrecciate: basti pensare ai numeri poligonali o alle approssimazioni geometriche fornite dai numeri laterali e diagonali. Un altro esempio è fornito dal *numero geometrico* della *Repubblica* di Platone.
Quanto al concetto di *definizione,* può essere utile, ancora una volta, far parlare l'Aristotele degli *Analitici secondi*:

Di un principio immediato del sillogismo chiamo tesi[13] quella che non è possibile dimostrare né è necessario che possieda chi impara qualcosa; chiamo invece assioma[14] quello che è necessario che possieda chi imparerà qualunque cosa. Infatti alcune cose sono di questo tipo: ché nei casi di questo genere siamo soliti pronunciare questo nome. Di una tesi, quella che assume una qualsiasi delle due parti della contraddizione — dico, per esempio, l'esistere qualcosa o il non esistere qualcosa — è un'ipotesi[15]; quella che manca di questo[16] è una definizione. Ché la definizione è una tesi: infatti lo studioso di aritmetica pone che monade è l'essere indivisibile secondo la quantità; ma non è un'ipotesi: infatti «che cos'è la monade» e «che esiste la monade» non sono la stessa cosa.

Il ruolo svolto dalle definizioni nelle dimostrazioni è indubbio. Tuttavia, è necessario effettuare alcune distinzioni. Una di queste ci è indicata da Proclo, con due precisi riferimenti all'opera euclidea.

Potremo poi trovare che ciò che chiamiamo prova, poiché possiede le proprietà della dimostrazione, talvolta mostra la cosa cercata per mezzo di definizioni intermedie — e questa è la perfezione della dimostrazione —; altre volte tenta di farlo con prove induttive; e questo fatto non deve essere taciuto. Perché i ragionamenti logici posseggono in ogni caso la necessità logica derivante dalla materia a loro soggetta, ma non in ogni caso si concludono mediante procedimenti dimostrativi. Quando per esempio si dimostra che il triangolo ha i tre angoli interni eguali a due retti, per il fatto che l'angolo esterno del triangolo è uguale alla somma dei due angoli interni ed opposti[20], come questa dimostrazione può dirsi che consegua a una causa e che invece non sia un indizio intermedio? Perché pur non esistendo ancora l'angolo esterno, gli angoli interni, che esistono, sono eguali a due retti; perché esiste il triangolo anche senza avere il lato prolungato. Ma quando si dimostra mediante la descrizione dei cerchi, che il triangolo inscritto è equilatero, la comprensione risulta dalla causa, perché noi riteniamo la similitudine e l'eguaglianza dei cerchi la causa dell'eguaglianza dei lati del triangolo[21].

In secondo luogo, non tutte le definizioni si prestano ad essere applicate in una dimostrazione, ed alcune, pur adatte allo scopo, vengono enunciate da Euclide senza che, successivamente, se ne faccia alcun uso. A proposito delle Definizioni del Libro I, si può osservare che, mentre le prime otto, così come anche la XIII e la XIV, sono puramente descrittive, inservibili dal punto di vista di un ragionamento sillogistico, altre sembrano rispondere unicamente ad un intento classificatorio (XIX-XXII), introducendo termini destinati a non ricomparire (*romboide*, *rettangolo*), perché l'oggetto così denotato non viene mai coinvolto nella trattazione, oppure perché viene diversamente denominato (*parallelogramma rettangolo*). Se la seconda tipologia fa pensare allo spirito pitagorico, la prima viene inserita da Proclo nella scia dell'epistemologia platonica, che vede nella matematica la *conoscenza ragionata* (*διάνοια*) intermedia fra l'idea (*νοῦς*, indivisibile e intelligibile) e il mondo fisico (divisibile e sensibile). La figura geometrica *elementare*, introdotta nelle Definizioni del Libro

I, sarebbe la proiezione nell'immaginazione dell'idea, suscitata dalla percezione delle forme naturali, ma da queste effettivamente separata, e chiamata a fare da tramite tra i due opposti:

> E dove mai abbiamo osservato nelle cose percepibili un punto senza parti, o una linea senza larghezza, o una superficie senza spessore, o l'eguaglianza delle linee partenti dal centro, o, in generale, tutte le figure poligonali e poliedriche che ci sono insegnate dalla geometria? Come, ancora, i ragionamenti di questa scienza permangono inconfutabili quando le figure e le forme ammettono il più e il meno; e sono mobili e mutevoli in tutti i sensi; e sono ripiene di ogni indeterminata materia; e l'eguaglianza è presente in esse insieme col suo contrario, la diseguaglianza; e se, indivisibili, si presentano secondo divisione e dimensione? Se gli oggetti della geometria sono al di fuori della materia e i loro concetti sono puri e separati dalle cose sensibili, essi saranno tutti indivisi, incorporei, senza grandezza; ché l'estensione, il volume, e, in generale, la dimensione, i concetti l'acquistano mediante l'involucro materiale che li assume: gl'indivisibili sotto specie divisibile, gl'indimensionati sotto specie dimensionabile, gli immobili sotto specie mobile e mutevole. Come dunque ancora sechiamo la retta, il triangolo, il circolo? Come parliamo di differenze di angoli, e d'ingrandimenti e diminuzioni di figure, per esempio triangolari o quadrangolari? Come dei punti di contatto dei cerchi o delle rette? Perché tutte queste cose dimostrano che la materia geometrica è divisibile e non consiste in concetti indivisibili.

Da questo punto di vista, come messo in evidenza da Socrate nel *Menone*, il *diagramma* è lo strumento principe dell'apprendimento inteso come reminiscenza, in quanto introduce la suddivisione in parti nell'immagine mentale di un'idea, di per sé una e indivisibile.

<u>Postulati e nozioni comuni (con digressione platonica)</u>

Rientrano fra quelli che Aristotele chiama *principi immediati*, e sono, nell'ordine, le *ipotesi* e gli *assiomi*. Il ruolo delle prime è illustrata sul piano teorico in un passo del dialogo platonico *Fedone* (paragrafo XLIX):

*Che se poi qualcuno attaccasse addirittura il **principio**, tu lo lasceresti dire senza rispondergli, fino a che non avessi esaminato se le conseguenze che derivano da quel **supposto**, concordino, secondo te, o discordino tra loro. E quando infine ti convenisse di render conto del **principio** stesso, non lo faresti ponendo daccapo a fondamento un altro **supposto**, quello che tra i **principi** anche più alti ti paresse il migliore, finché tu giungessi a qualcosa di sicuro […] quando almeno volessi trovare qualcosa di ciò che è?*

L'ipotesi (nel testo, *supposto* o *principio*) è un'affermazione assunta come possibile verità da cui far discendere altre affermazioni, con lo scopo di dedurne la conferma di una certa supposizione, oppure la sua smentita. In ogni caso è logicamente sovraordinata alla risposta che si vuole ottenere. Un esempio pratico di applicazione, riferito all'ambito matematico, si trova nel *Menone* (paragrafo XXII):

*Dobbiamo dunque, se non erro, indagare qual è qualche cosa, di cui non sappiamo ancora che cosa è. […] E dico per via d'***ipotesi** *così, come fanno spesso i geometri nelle proprie ricerche. Quando si domanda, per esempio, d'un'area, se quest'area possa essere iscritta in questo cerchio come triangolo, un geometra risponderebbe: "Non so ancora se ciò è possibile, ma credo che possa contribuire alla soluzione questo che propongo come ipotesi: se si verificano talune condizioni, si otterrà, mi pare, un certo risultato, ma il risultato sarà diverso, se queste condizioni non si verificano. Ragionando dunque così per* **ipotesi***, ti dirò quel che risulta intorno all'iscrizione del triangolo nel cerchio, se è possibile o no."*

La strada che porta alla soluzione viene cercata guardando indietro, non alle *cause prime*, che sono inarrivabili, bensì ad *ipotesi*, assunte a priori, ma di cui occorre eventualmente verificare deduttivamente la validità, intesa come non contraddittorietà rispetto a verità precedentemente assodate o comunque considerate incontrovertibili. Il discorso platonico citato funge da premessa ad un'indagine intorno alla domanda se la *virtù si possa insegnare*. Viene utilizzato, quale ipotesi, il principio, ritenuto evidente, secondo il quale la *virtù è un bene*. Quindi l'interrogativo si converte nella questione se esista o no un bene diverso dalla scienza. In caso affermativo, nulla si potrà concludere. In caso negativo, la congettura iniziale avrà ricevuto una conferma.
Quanto alla tecnica di confutazione, un esempio è contenuto nello stesso dialogo: Socrate, attraverso una serie di domande del tipo *sì o no*, ottiene che lo schiavo si renda conto dell'errore commesso nel momento in cui ha creduto che, per ricavare un quadrato avente area doppia rispetto ad un quadrato assegnato, si dovesse raddoppiare la lunghezza dei suoi lati. L'effetto è prodotto mediante una sorta di *reductio ad absurdum*, ossia arrivando ad una conclusione incompatibile con la convinzione iniziale. Il percorso è tracciato secondo il *metodo della divisione*, che provoca distinzioni successive tra vero e falso. Un'altra applicazione, di stampo "insiemistico" si trova nel *Lachete*, e riguarda una ricerca intorno alla natura del coraggio: prima si suppone che il *coraggio sia fermezza*, ma si scopre che a volte è coraggioso anche chi combattendo, fugge; quindi, assunta come ipotesi che il *coraggio sia una cosa bella*, la tesi secondo cui il *coraggio sia pertinacia* viene smontata nel momento in cui si scopre che la pertinacia è bella solo se associata all'intelligenza, se unita alla stoltezza è invece cattiva e dannosa. Questa tecnica di confutazione è nota sotto il termine di *ἔλεγχος*, che indica la *prova*, la *confutazione*, l'*argomentazione*, ma anche l'*inchiesta*.

Sulle ipotesi utilizzate dai matematici Platone interviene alla fine del Libro VI della *Repubblica* (paragrafo XX):

Tu sai, credo, che quelli, i quali si occupano di geometria, di aritmetica e di altre discipline dello stesso genere, suppongono il dispari e il pari, le varie figure, tre specie di angoli e altre cose simili, secondo l'oggetto della loro ricerca; le trattano da ***cose ben note****, le pongono come* ***ipotesi****, stimano di non essere obbligati a darne ragione né a sé, né agli altri, quasi che siano evidenti a tutti, e movendo da esse per procedere nei loro ragionamenti, da una proposizione all'altra giungono infine alla dimostrazione a cui miravano.*

Per quanto riguarda il contenuto degli *Elementi*, anche per i principi si impone in effetti una distinzione di ambiti: alcuni sono specifici della geometria, altri sono trasversali a tutti settori della matematica. I primi, i *postulati* (in greco *αἰτήματα*, letteralmente, *richieste*), sono cinque: i primi riguardano la possibilità di effettuare costruzioni fondamentali con riga e compasso (congiungere due punti con un segmento, prolungare un segmento, descrivere un cerchio con un centro dato e avente un raggio assegnato), il quarto afferma l'uguaglianza tra tutti gli angoli retti, l'ultimo (noto come *postulato delle parallele*), stabilisce una condizione sufficiente affinché due rette si intersechino. Le *nozioni comuni* (*κοιναί έννοιαι*) sono invece riferite a qualsiasi ambito, in quanto riguardano le proprietà dell'uguaglianza (per sovrapposizione) e della disuguaglianza. Si tratta di otto enunciati. Alcuni autori riportano un nono enunciato, secondo cui *due rette non comprendono un dominio*, ma questo è probabilmente frutto di interpolazioni successive.

Gli enunciati e le dimostrazioni – problemi e teoremi - i dati - la *reductio ad absurdum*

Una prima distinzione è avvenuta, in numerose trascrizioni dell'opera, tra *teoremi* e *problemi*. Una spiegazione dei due generi ci è fornita da Proclo. Questi ci illustra anche la struttura delle dimostrazioni/costruzioni, che ci propone come suddivise nelle seguenti parti:

1. Enunciato (πρότασις)
2. Esposizione (έκθεσις)
3. Determinazione (διορισμός)
4. Costruzione (κατασκευή)
5. Dimostrazione (απόδειξις)
6. Conclusione (συμπέρασμα)

L'*esposizione* contiene il dato/l'ipotesi, la *determinazione* presenta la cosa cercata/la tesi. In alcuni casi queste due parti possono essere saltate, qualora, ad esempio, nell'enunciato di un problema non sia possibile distinguere ciò che dato e ciò che è cercato. Ciò avviene per la Proposizione 10 del Libro IV, che chiede di costruire un triangolo isoscele avente i due angoli uguali di ampiezza doppia rispetto al terzo angolo. In tal caso, di fatto, la determinazione coincide con l'enunciato.
Quanto al *dato*, sempre secondo Proclo, è possibile proporlo *o in posizione, o in rapporto, o in grandezza o in specie:*

Il punto è dato solo in posizione. La linea e tutti gli altri dati possono presentarsi in tutti questi modi. Quando diciamo di bisecare un angolo rettilineo dato, noi diciamo qual è la specie dell'angolo dato, che è cioè rettilineo; affinché non si cerchi di bisecare anche il curvilineo in questo modo. Quando invece diciamo: date due rette diseguali, togliere dalla maggiore una retta uguale alla minore, il dato è presentato in grandezza, perché il maggiore e il minore, il limitato e l'illimitato sono attributi propri della grandezza. Ma quando diciamo che se quattro grandezze sono proporzionali, saranno proporzionali anche permutando, per le quattro grandezze è data un'eguaglianza di rapporto: e quando si deve tracciare una retta eguale ad una retta data a partire da un punto dato, allora il punto è dato di posizione.

Euclide, in un'altra sua opera (*Data*), così definisce ciò che egli intenda per *dato*. Citiamo le prime sei definizioni:

- *Sono detti dati in grandezza sia domini che linee che angoli di cui possiamo produrre uguali.*
- *Un rapporto è detto essere dato a cui possiamo produrre uno identico.*
- *Figure rettilinee sono dette essere date in forma di cui sono dati sia gli angoli uno per uno che i rapporti dei lati tra loro.*
- *Sono detti essere dati in posizione sia punti sia linee che angoli che occupano sempre lo stesso luogo.*
- *Un cerchio è detto essere dato in grandezza di cui è dato il raggio in grandezza.*
- *Ed è detto essere dato in grandezza e posizione un cerchio il centro del quale è dato in posizione.*

Dalla prima definizione risulta evidente come *dato* non significhi, per Euclide, *assegnato*, bensì *riproducibile*, o, se vogliamo, *esplicitabile*, su un nuovo supporto, a partire dall'insieme dei "dati" in senso stretto, entro i quali è implicitamente contenuto. Questa nozione include, in particolare, l'unicità. Ciò che è *dato* è *univocamente determinato*.

Per il resto, si può osservare che i due generi *teorema* e *problema* si differenziano già nella formulazione: se i primi presentano una forma assertiva, per i secondi la forma è prescrittiva. A titolo di esempio, si possono confrontare i primi tre enunciati del Libro I con i tre immediatamente successivi:

1. *Costruire sulla retta limitata data un triangolo equilatero.*
2. *Porre sul punto dato una retta uguale alla retta data.*
3. *Di due rette disuguali date, sottrarre dalla maggiore una retta uguale alla minore.*

4. *Qualora due triangoli abbiano i due lati rispettivamente uguali a due lati, e abbiano anche l'angolo, quello compreso fra le rette uguali, uguale all'angolo, avranno anche la base uguale alla base, e il triangolo sarà uguale al triangolo, e i restanti angoli, sotto cui si tendono i lati uguali, saranno rispettivamente uguali ai restanti angoli.*
5. *Gli angoli sulla base dei triangoli isosceli sono uguali tra loro, e, prolungate avanti le rette uguali, gli angoli sotto la base saranno uguali tra loro.*
6. *Qualora due angoli di un triangolo siano uguali tra loro, anche i lati che si tendono sotto gli angoli uguali saranno uguali tra loro.*

Nella seconda terna, si possono notare l'assenza della quantificazione (raramente presente, nella forma universale, nel resto dell'opera) e il prevalere della forma condizionale, tipica dell'implicazione. Fa eccezione, tra gli altri, il seguente enunciato (Proposizione 20 del Libro IX), interessante anche sotto un ulteriore profilo:

I numeri primi sono più di ogni molteplicità proposta di numeri primi.

La parola *ogni* traduce letteralmente l'originale greco *παντός* (tutti). Manca la forma condizionale, ma questa va intesa come implicita. La vediamo infatti emergere nel momento in cui l'enunciato, all'inizio della dimostrazione, viene riproposto, suddiviso nelle due parti di cui logicamente si compone. Riportiamo l'intero testo, nella traduzione di Fabio Acerbi:

Siano i numeri primi proposti A, B, Γ: dico che ci sono più numeri primi di A, B, Γ. Sia infatti stato preso il minimo <numero> misurato da A, B, Γ e sia ΔE, e sia stata sommata a ΔE un'unità ΔZ. EZ è pertanto o primo oppure no. Sia in primo luogo primo: risultano quindi trovati più numeri primi, A, B, Γ, EZ, di A, B, Γ. Ma ora EZ non sia primo. Sia misurato da H primo: dico che non è lo stesso di nessuno degli A, B, Γ. Se infatti possibile (δυνατόν), sia. E A, B, Γ misurano ΔE: anche H misurerà quindi ΔE. E misura anche EZ: misurerà anche l'unità ΔZ restante essendo H un numero; il che è assurdo (άτοπον). Non si dà quindi il caso che H sia lo stesso di uno solo degli A, B, Γ. Ed è stato supposto primo. Risultano quindi essere trovati più numeri primi A, B, Γ, H, della molteplicità proposta di A, B, Γ: il che si doveva dimostrare.

La dimostrazione riguarda, in effetti, un enunciato *esistenziale*, e si svolge in maniera costruttiva, indicando come trovare un ulteriore numero primo (*H*) non compreso nell'insieme assegnato di numeri primi (*A, B, Γ*). Le procedure sono due, distinte secondo i casi che si possono presentare (il numero ottenuto sommando un'unità al minimo comune multiplo di *A, B, Γ* è primo oppure composto). Nel secondo caso si applica la Proposizione 31 del Libro VII (*Ogni numero composto ha per divisore un numero primo*), e trovato un divisore primo *H*, si utilizza la *reductio ad absurdum* (ossia a qualcosa di *impossibile* oppure di *fuori luogo*) per provare che questo è distinto dai tre primi assegnati. Precisamente, si prova che, se così non fosse, si giungerebbe ad una conclusione che contrasta con un'evidenza aritmetica (insita nel concetto stesso di *unità*: questa si ritroverebbe *misurata* da un numero, ossia da una pluralità di unità). Nella dimostrazione della Proposizione 31, di contro,

- il ragionamento per assurdo mira a provare non una certa proprietà di un numero trovato, bensì la stessa possibilità di trovare un numero tramite un certo procedimento ricorsivo (che non può protrarsi all'infinito);
- l'assurdo a cui si perviene è una conclusione in contrasto non con la indivisibilità dell'uno, bensì con la non illimitata divisibilità del numero.

Quest'ultimo argomento è dello stesso tipo applicato nella citata dimostrazione per dimezzamenti successivi dell'incommensurabilità tra la diagonale e il lato del quadrato.
Un ulteriore esempio di *reductio ad absurdum*, questa volta in ambito geometrico, è dato dalla Proposizione 6 del Libro I. In questo caso si finisce per dedurre che *il minore è uguale al maggiore*.
L'origine di questo tipo di argomentazione si colloca al di fuori della matematica. Un esempio spesso citato è quello del poema *Sulla Natura* di Parmenide (VI-V secolo a.C.): *Del non-essere non ti concedo né di dirlo né di pensarlo, perché non è possibile né dire né pensare che non è*. Questa idea di smentire una tesi (l'esistenza o inesistenza di qualcosa) con la derivazione di una conseguenza paradossale è presente anche all'inizio del saggio *L'antica medicina* di Ippocrate (460- dopo il 377 a.C.): *ora, se la medicina non esistesse affatto e nel suo ambito nulla si fosse indagato né scoperto, ciò non sarebbe possibile, ma tutti, a proposito di essa, sarebbero parimenti sprovveduti di esperienza e di scienza, e dal caso sarebbe governato tutto quanto riguarda i malati.*

Il grande assente: il principio di induzione?

La ricorsività contenuta nella dimostrazione della Proposizione 31 è alla base di un ragionamento per assurdo passato alla storia come *descente infinie*, dopo essere stato utilizzato da Pierre de Fermat per dimostrare alcuni casi del suo Ultimo Teorema. Oggi sappiamo che esso trova fondamento nel principio del minimo, equivalente, nell'assiomatica di Peano, al principio di induzione. Ha come conseguenza "operativa" l'impossibilità di costruire una successione (infinita) strettamente decrescente di numeri naturali. Ed è in questa forma che lo vediamo applicato negli *Elementi*. Un altro esempio importante è costituito dalle Proposizioni 1-3 del Libro VII, in cui viene descritto il procedimento a noi noto come *algoritmo delle divisioni successive* per la determinazione di un massimo comune divisore di due (o tre) interi positivi. Si propone di effettuare quelle che, in realtà, sono *sottrazioni successive*, del numero minore dal numero maggiore, finché ciò non è più possibile (perché non rimane nulla, oppure un numero più piccolo del sottraendo). In tal modo si determina il primo resto, che poi diverrà il sottraendo del secondo passo, nel quale il minuendo sarà il precedente sottraendo. Al passo seguente, il minuendo sarà invece il primo resto ottenuto, e così via. Euclide intende che il procedimento deve fermarsi, prima o poi, visto che il minuendo continua a decrescere. Non viene applicata invece, l'iterazione ricorsiva, né per dare origine ad una crescita illimitata, né per dimostrare proprietà dei numeri naturali tramite base dell'induzione e passo induttivo. Significativa è, in tal senso la forma dell'enunciato che noi erroneamente citiamo come *infinità dei numeri primi*: tale enunciato, infatti, non si esprime in questi termini, né nella sua dimostrazione si fa riferimento ad una costruzione che possa essere ripetuta un numero arbitrario di volte per produrre un numero via via sempre maggiore di numeri primi.

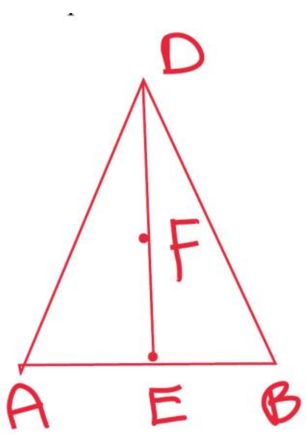
In questo modo non soltanto viene evitato il ricorso all'*infinito attuale*, ma si escludono a priori i tranelli argomentativi che caratterizzano paradossi come quelli del *sorite* e di *Achille e la tartaruga*.

Il primo, di origine antica ma incerta, pretenderebbe di provare che un solo granello forma un mucchio, dal momento in cui, dato un mucchio, questo resta tale se vi si sottrae un granello. La debolezza del ragionamento consiste nel fatto che la proprietà assunta come ipotesi induttiva non si applica indifferentemente ad ogni "mucchio", ma soltanto alle quantità rispetto alle quali un granello sia una porzione trascurabile. In altri termini, esiste certamente un passaggio a partire dal quale il "mucchio" cessa di rimanere un "mucchio". Il ragionamento si estende dunque oltre il limite consentito.

Il secondo, dovuto a Zenone di Elea (V sec. a.C.), al contrario, finge che il procedimento applicato porti a considerare istanti temporali che superano ogni possibile limite: questi sono infatti tutti anteriori al momento in cui avviene il sorpasso. Il ragionamento è corretto, ma viene, per l'appunto, applicato solo ove funziona, e ciò avviene solo al di qua di un certo limite.

<u>Il carattere generale</u>

L'impostazione di Euclide non si preoccupa dell'aspetto *globale* dell'effetto complessivamente prodotto da un'iterazione indefinita: si limita ad accertare la validità *locale* del meccanismo descritto. A partire da un dato iniziale qualsiasi, il passo considerato produce sempre un oggetto del tipo richiesto. Si osservi, a tal proposito, come il carattere locale della costruzione (del nuovo numero primo) non ne infici minimamente la **generalità**. In particolare, l'uso del linguaggio segue una struttura logica che copre, nella *forma*, tutti i casi rientranti nelle premesse e nelle successive costruzioni/deduzioni. Ciò rende superfluo il ricorso al diagramma. Non è dall'evidenza grafica che si coglie la correttezza del ragionamento, né il disegno è necessario a far comprendere la configurazione geometrica, le posizioni e le relazioni metriche tra gli oggetti considerati. Questa funzione è invece spesso svolta dai loro **nomi**, nel momento in cui si presentano come composizioni ragionate di lettere. Alcuni esempi significativi sono contenuti nella dimostrazione della Proposizione 2 del Libro III:



Sia ABC un cerchio, e sulla sua circonferenza si prendano i due punti A, B a piacere; dico che la retta la quale congiunge A con B cadrà internamente al cerchio.

Infatti, non cada in tal modo, ma, se possibile, venga a cadere esternamente, come fa la retta AEB, si prenda il centro del cerchio ABC e sia esso D (III, 1), si traccino le congiungenti DA, DB, e si tracci [infine] la retta DFE.

Poiché dunque DA è uguale a DB, anche l'angolo DAE è uguale all'angolo DBE (I, 5); e poiché nel triangolo DAE un lato, AE, risulta prolungato oltre E sino a B, l'angolo DEB è maggiore dell'angolo DAE (I, 16). Ma l'angolo DAE è uguale all'angolo DBE, per cui DEB è maggiore di DBE. E ad angolo maggiore è opposto lato maggiore (I, 19); DB è quindi maggiore di DE. Ma DB è uguale a DF; perciò DF è in tal caso maggiore di DE, il lato minore del maggiore: il che è impossibile (noz. com. VIII). Quindi la retta che congiunge A con B non cadrà esternamente al cerchio. Similmente potremo dimostrare che essa non può cadere neppure sulla circonferenza stessa; verrà quindi a cadere internamente [al cerchio].

Vengono introdotte, per le rette del secondo paragrafo, denominazioni che coinvolgono lettere (*E* ed *F*) di cui non viene precisato il significato. Si deve intendere, per una convenzione consolidata nel testo, che si riferiscano a punti, intermedi tra i due punti estremi della terna: dunque *DE* sarà maggiore di *DF*, che ne costituisce un parte. Da quanto affermato successivamente risulta inoltre evidente che *F* si trova sulla circonferenza, e quindi *E* cade all'esterno di questa.
Ancor più significativo è l'esempio della Proposizione 2 del Libro I.

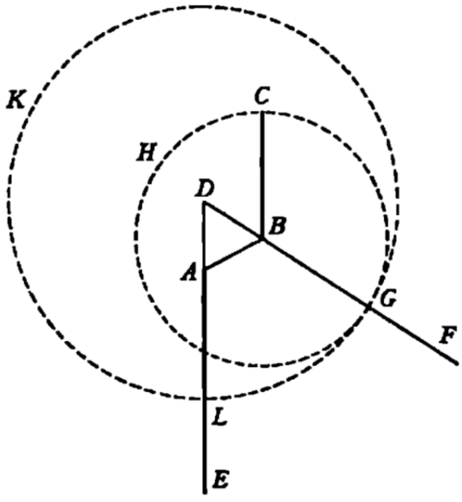
PROPOSIZIONE 2.

Applicare ad un punto dato una retta uguale ad una retta data [2].

Siano *A* il punto dato e *BC* la retta data; si deve dunque applicare con un estremo nel punto *A* una retta che sia uguale alla retta data *BC*.

Infatti, risultino: dal punto *A* al punto *B* tracciata la congiungente *AB* (post. I), costruito su essa il triangolo equilatero *DAB* (I, 1), ottenute le rette *AE*, *BF* prolungando in linea retta *DA*, *DB* (post. II) •, con centro *B* e raggio *BC* descritto il cerchio *CGH* (post. III), e, di nuovo, con centro *D* e raggio *DG*, descritto il cerchio *GKL* (id.).

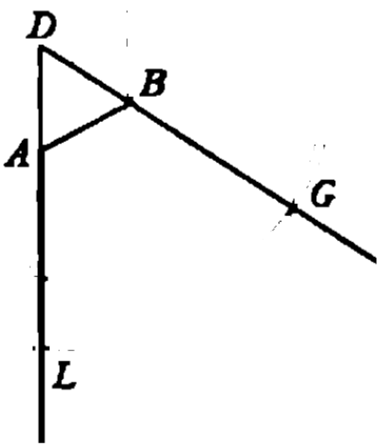
Poiché dunque il punto *B* è centro del cerchio *CGH*, si ha che *BC* è uguale a *BG*. Di nuovo, poiché il punto *D* è centro del cerchio *GKL*, si ha che *DL* è uguale a *DG*. Ora, di queste rette le parti *DA*, *DB* sono uguali; perciò la parte che rimane dell'una, *AL*, è uguale a quella che rimane dell'altra, *BG* (noz. com. III) •. Ma fu dimostrato che pure *BC* è uguale a *BG*; ciascuna delle due rette *AL*, *BC* è quindi uguale alla retta *BG*. Ma cose che sono uguali ad una stessa sono pure uguali fra loro (noz. com. I); anche *AL*, *BC* sono perciò uguali.



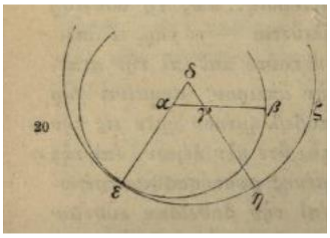
Dunque, la retta *AL* uguale alla retta data *BC* viene a trovarsi con un estremo nel punto dato *A*. – C.D.F.

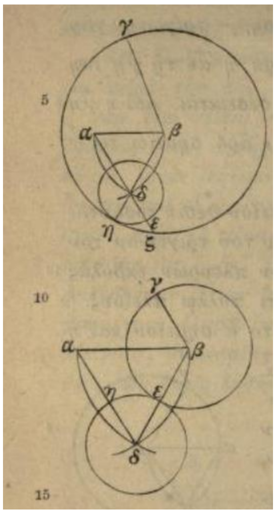
APPLICA: I, 1.
È APPLICATA IN: I, 3.

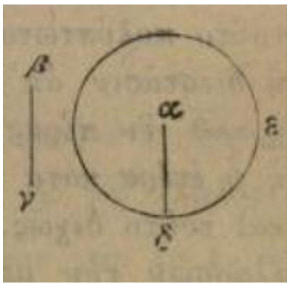
Di nuovo, nel secondo paragrafo vengono introdotte lettere (*G*, *H*, *K*, *L*) senza alcuna ulteriore indicazione. Si sa solamente che si trovano sulle circonferenze descritte. Risulta poi che due di queste (*H* e *K*) non vengono mai utilizzate singolarmente: esse denotano punti, ma di questi, di cui non viene specificata la posizione, non verrà fatto alcun uso nel seguito. Ricompaiono

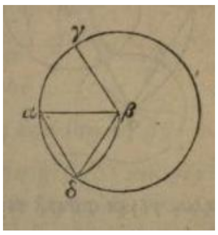


invece, come estremi di segmenti, i punti *G* e *L*. Di questi si può dedurre la collocazione, la sola che renda sensato il successivo sviluppo dell'argomentazione. Nel momento in cui si dice che *DB* è parte di *DG* si conclude immediatamente che *G* è allineato con *D* e *B*, e che *B* è intermedio fra *D* e *G*. In altri termini, *G* si trova sulla circonferenza di centro *B* e raggio *BC*, sul diametro passante per *D*, ma, visto dal centro, risulta dalla parte opposta rispetto a *D*. In maniera analoga si deve dedurre che *L* è allineato con *D* ed *A*, e quest'ultimo si trova fra *D* e *L*. Si noti, a questo punto, che non v'è alcun impedimento a questa posizione reciproca di *D, A, L*: infatti, *DA*, per costruzione, è uguale a *DB*, che è minore di *DG*, e questo, sempre per costruzione, è uguale a *DL*. Dunque *DA* è minore di *DL*. E tanto basta per portare a termine la dimostrazione. Non è necessario il ricorso ad alcuna immagine. In particolare, è del tutto irrilevante la posizione reciproca delle due circonferenze *CGH* e *GKL*. E tale è anche la relazione tra le lunghezze di *BC* e *BD*. Eppure Proclo, nel suo *Commento*, si affanna a disegnare, uno per uno, i possibili casi:









Questa distinzione può avere luogo solo sulla carta, e si avvale di un abbondante uso dell'inchiostro: il *diagramma* inteso da Euclide sembra invece essere quello, immediato e puramente mentale, invocato da Platone.

I rapporti incommensurabili – il Libro X – il metodo di esaustione

Le prime sette definizioni del Libro V consentono di stabilire un confronto tra il *rapporto di numeri* e il *rapporto di grandezze*. Non vi sono differenze riguardo ai concetti di *divisore* (Definizione I) e di *multiplo* (Definizione II) ma una sostanziale difformità si constata nella nozione di *ragione* (*ratio, λόγος*). Questa non viene necessariamente ricondotta ad un numero (come nei precedenti due casi) oppure ad una coppia di numeri (come per la frazione). Non è quantificabile, se non in maniera indiretta (Definizioni III e IV), ed è invece definibile logicamente attraverso una proprietà generale, che viene espressa in termini relativi, individuando i rapporti uguali (Definizioni V e VI) e stabilendo quando un rapporto debba essere considerato maggiore di un altro (Definizione VII).

I) *Una grandezza è parte di una grandezza, la minore della maggiore, quando essa misuri la maggiore.*
II) *La grandezza maggiore è multipla di quella minore, quando sia misurata dalla minore.*
III) *Rapporto fra due grandezze omogenee è un certo modo di comportarsi rispetto alla quantità.*
IV) *Si dice che hanno fra loro rapporto le grandezze le quali possono, se moltiplicate, superarsi reciprocamente.*
V) *Si dice che quattro grandezze sono nello stesso rapporto, una prima rispetto ad una seconda ed una terza rispetto a una quarta, quando risulti che equimultipli della prima e della terza presi secondo un multiplo qualsiasi, ed equimultipli della seconda e della quarta, presi pure secondo un multiplo qualsiasi, sono gli uni degli altri, cioè ciascuno dei due primi del suo corrispondente fra i secondi, o tutti e due maggiori, o tutti e due uguali, o tutti e due minori, se considerati appunto nell'ordine rispettivo.*
VI) *Grandezze che hanno lo stesso rapporto si dicono proporzionali.*
VII) *Quando, degli equimultipli, il multiplo della prima grandezza è maggiore del multiplo della seconda, ma il multiplo della terza non è maggiore del multiplo della quarta, si dice allora che la prima grandezza ha, rispetto alla seconda, rapporto maggiore di quello che la terza ha rispetto alla quarta.*

La Definizione III è motivata dall'esistenza di rapporti fra grandezze (lunghezze di segmenti, aree di figure) non esprimibili come quozienti di interi. Ciò non impedisce di confrontare due rapporti di questo tipo (stabilendo che sono uguali, oppure individuando il maggiore dei due) proprio riconducendosi ai numeri interi. Precisamente, una volta appurato che, date le grandezze A e B, C e D, a queste si applica quanto richiesto dalla Definizione IV, si dirà che il rapporto tra A e B è uguale al rapporto fra C e D, se, comunque fissati due numeri interi positivi m ed n, si ha, nell'ordine, il caso $mA > nB$, il caso $mA = nB$, o il caso $mA < nB$, sempre e soltanto insieme al corrispondente caso fra $mC > nD$, $mC = nD$ e $mC < nD$. Qualora, invece, per qualche coppia di interi m ed n, si abbia $mA > nB$ senza avere si dice che il primo rapporto è maggiore del secondo.
Queste definizioni, che si fanno risalire a Eudosso di Cnido, vengono utilizzate nelle dimostrazioni riguardanti rapporti di proporzionalità fra grandezze geometriche, ad esempio, lunghezze di lati di figure. Prima fra tutte, la Proposizione 1 del Libro VI, secondo la quale (*le aree di*) *triangoli e parallelogrammi che abbiano la stessa altezza stanno fra loro come le basi.*

Le grandezze (in)commensurabili - *(α)σύμμετρα μεγέθη* - sono introdotte dalle Definizioni del Libro X, di cui riportiamo le prime due, nella traduzione di Fabio Acerbi:

I) *Grandezze commensurabili sono dette quelle misurate con la stessa misura, incommensurabili quelle di cui non è possibile che risulti nessuna misura comune.*
II) *Rette sono commensurabili in potenza, quando i quadrati su di esse siano misurati con lo stesso dominio, incommensurabili quando non è possibile che risulti nessun dominio misura comune ai quadrati di esse.*

L'incommensurabilità significa dunque l'inesistenza di una grandezza della stessa specie (lunghezza o area) di cui le due grandezze considerate siano entrambe multiple. Due lunghezze sono dette commensurabili in potenza (*δύναμις*) quando sono commensurabili le aree dei quadrati su di esse costruiti. Qui il termine *potenza* indica la possibilità, da parte delle rette, di generare nuove grandezze, le aree dei quadrati. La parola è utilizzata, in questo contesto, anche nel *Teeteto*.

Un criterio di commensurabilità è fornito dalla Proposizione 2 del Libro X, che lo individua nella illimitatezza del procedimento di *antiferesi*:

Qualora, fissate due grandezze disuguali e sottratta reciprocamente in successione la minore dalla maggiore, quello che resta fuori non misuri mai completamente quella prima di se stesso, le grandezze saranno incommensurabili.

Si tratta di una sorta di algoritmo delle divisioni successive indefinito, in quanto non capita mai che il resto divida esattamente il divisore (nel qual caso il resto successivo sarebbe nullo, e quel resto sarebbe una misura comune delle due grandezze assegnate). Questo è difatti il metodo indicato nella costruzione che risolve il problema proposto nella successiva Proposizione 3:

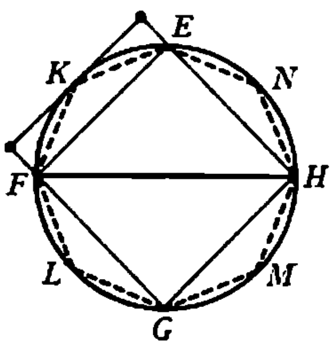
Date due grandezze commensurabili trovare la loro massima misura comune.

La Proposizione 1, invece, fornisce un procedimento ricorsivo per ottenere, per sottrazioni successive da una grandezza assegnata, una grandezza che sia minore di una certa altra grandezza assegnata:

Fissate due grandezze disuguali, qualora dalla maggiore sia sottratta una grandezza maggiore che la metà e da quella restata fuori una maggiore della metà, e questo risulti in successione, sarà restata fuori una certa grandezza, che sarà minore della minore grandezza fissata.

Questo criterio è alla base del *cosiddetto metodo di esaustione*, che consente di dimostrare – per assurdo - enunciati come il seguente (Proposizione 2 del Libro XII), senza conoscere il valore dell'area del cerchio.

I cerchi sono tra loro come i quadrati sui diametri.



Ne proponiamo una sintesi. Assegnati due cerchi *A* e *B*, supponiamo per assurdo che il rapporto fra l'area di *A* e l'area di *B* non sia uguale al rapporto fra le aree dei quadrati *C* e *D* costruiti sui loro diametri. Supponiamo, dapprima, che questo secondo rapporto sia pari al rapporto fra *A* e un'area Δ minore di *B*. Ora. Si consideri il **quadrato** *EFGH* **inscritto nel cerchio** *B*. La sua area è pari alla metà dell'area del quadrato circoscritto a *B*. Quindi l'area del quadrato inscritto è maggiore della metà dell'area del cerchio *B*.
Si sottragga l'area del quadrato dall'area del cerchio. Si ottengono quattro segmenti circolari.
Si bisechino dunque gli archi individuati da ciascuno di questi segmenti, in modo da determinare i loro punti medi *K, L, M, N.* Si congiungano gli otto punti così ottenuti sulla circonferenza di *B*. Si ottiene un **ottagono regolare inscritto nel cerchio *B***. I triangoli alla circonferenza formati da tre vertici consecutivi coprono un'area maggiore della metà del

corrispondente segmento circolare: infatti, raddoppiando uno qualsiasi di essi si ottiene un rettangolo che contiene detto segmento circolare.
Si sottraggano i quattro triangoli dai quattro segmenti circolari. Si ottengono otto segmenti circolari.
Si immagina di procedere nella maniera indicata, per dimezzamenti successivi degli archi risultanti dalla suddivisione precedente. In questo modo, **ogni volta si ottiene un nuovo poligono regolare inscritto nel cerchio *B*, e quindi si sottrae dall'area residua un'area maggiore della sua metà.** In base alla Proposizione 1, ciò **produrrà, prima o poi, un'area residua minore della differenza fra *B* e Δ. Tale area residua è pari alla differenza tra l'area del cerchio e quella dell'ultimo poligono inscritto. Quindi l'area del poligono inscritto *Q* è maggiore dell'area di Δ.**
In base alla Proposizione 1 del Libro XII, se *P* è un poligono simile a *Q* inscritto nel cerchio *A*, il rapporto tra le aree di *P* e *Q* è uguale al rapporto fra le aree di *C* e *D*. Ma questo è uguale al rapporto fra le aree di *A* e Δ. Quindi il rapporto fra le aree di *A* e *P* è uguale al rapporto fra le aree di Δ e *Q*. Ma l'area di *A* è ovviamente maggiore dell'area di *P*, poligono in esso inscritto. Ne consegue che anche **l'area di Δ è maggiore dell'area di *Q***, il che costituisce una contraddizione.

La parte più consistente del corposissimo Libro X (comprendente 115 Proposizioni) riguarda le cosiddette *rette irrazionali*, ossia i segmenti incommensurabili rispetto ad un segmento assunto come riferimento. Si tratta di una trattazione particolarmente farraginosa, di cui omettiamo i dettagli.

La geometria solida

La prima parte del Libro XI è dedicata agli angoli solidi, al parallelismo e all'ortogonalità tra piani e tra piani e rette. Molti dei successivi enunciati dei Libri XI, XII riguardano il calcolo dei volumi, che avviene sempre in forma relativa, in termini di proporzioni. Per le figure curvilinee viene ancora applicato il metodo di esaustione. Riportiamo di seguito alcuni esempi:

Libro XI:
Prop. 25: *Qualora un solido parallelepipedo sia secato con un piano che è parallelo ai piani opposti, sarà come la base rispetto alla base, così il solido rispetto al solido.*
Prop. 31: *I solidi parallelepipedi che sono su basi uguali e sotto la stessa altezza sono uguali fra loro.*
Prop. 33: *I solidi parallelepipedi simili sono tra loro in rapporto triplicato di quello dei lati omologhi.*

Libro XII:
Prop. 6: *Le piramidi che sono sotto la stessa altezza e che hanno basi poligonali sono tra loro come le basi*.
Prop. 8: *Le piramidi simili e che hanno basi triangolari sono in rapporto triplicato di quello dei lati omologhi.*
Prop. 10: *Ogni cono è terza parte di un cilindro, quello che ha la sua stessa base ed altezza uguale.*
Prop. 12: *I coni e cilindri simili sono tra loro in rapporto triplicato di quello dei diametri delle basi.*
Prop. 18: *Le sfere sono tra loro in rapporto triplicato di quello dei propri diametri.*

Il Libro XIII ha come finalità ultima la costruzione dei cinque solidi regolari. In esso trova applicazione la classificazione delle rette irrazionali presentata nel Libro X. Ecco il dettaglio degli enunciati:

Prop. 13: *Costruire e circondare con una sfera data una* ***piramide*** [tetraedro] *e dimostrare che il diametro della sfera è* ***tre mezzi*** *in potenza del lato della piramide.*

Prop. 14: *Costruire e circondare con una sfera un* ***ottaedro*** *e dimostrare che il diametro della sfera è* ***doppio*** *in potenza del lato dell'ottaedro.*
Prop. 15: *Costruire e circondare con una sfera un* ***cubo*** *e dimostrare che il diametro della sfera è* ***triplo*** *in potenza del lato del cubo.*
Prop. 16: *Costruire e circondare con una sfera un* ***icosaedro*** *e dimostrare che il lato dell'icosaedro è un'irrazionale, quella chiamata* ***minore****.*
Prop. 17: *Costruire e circondare con una sfera un* ***dodecaedro*** *e dimostrare che il lato del dodecaedro è un'irrazionale, quella chiamata* ***apotome****.*

La trattazione si conclude con un confronto in grandezza fra i lati dei poliedri regolari inscritti nella stessa sfera. Segue l'osservazione che non esistono altri solidi le cui facce siano poligoni regolari uguali: questa conclusione è basata sulla considerazione che, per realizzare un angolo solido (formato da almeno tre angoli piani, ma minore di quattro retti, v. Prop. 21 del Libro XI) con poligoni regolari uguali, le uniche possibilità sono le seguenti:

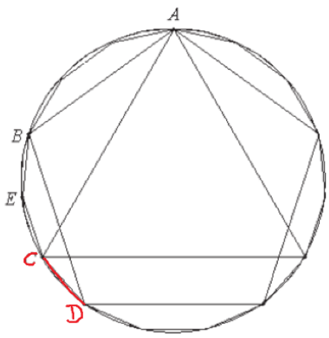
- tre triangoli (tetraedro), quattro triangoli (ottaedro), cinque triangoli (icosaedro);
- tre quadrati (cubo);
- tre pentagoni (dodecaedro).

La dimostrazione che *l'angolo del pentagono equilatero ed equiangolo è un retto e un quinto* è l'ultimo risultato dell'opera.

Le costruzioni dei poligoni regolari (*equilateri ed equiangoli*) sono presentate in:

- Triangolo: Libro I, Prop. 1 e Libro IV, Prop. 2
- Quadrato: Libro I, Prop. 46 e Libro IV, Prop. 6
- Pentagono: Libro IV, Prop. 11
- Esagono: Libro IV, Prop. 15
- Pentadecagono: Libro IV, Prop. 16

L'ultima delle costruzioni presentate è di fatto aritmetica: è basata sull'uguaglianza numerica $\frac{2}{5}-\frac{1}{3}=\frac{1}{15}$, alla luce della quale si ricava la quindicesima parte di una circonferenza sottraendo, dall'arco che sottende due lati consecutivi di un pentagono regolare inscritto, quello corrispondente ad un triangolo equilatero inscritto:



In questo senso, la costruzione del pentadecagono regolare è un corollario (*porisma*) di quelle del triangolo equilatero e del pentagono regolare.