Talete di Mileto (VII-VI secolo a.C.)

Enunciati attribuiti a Talete (e contenuti negli *Elementi di Euclide*)

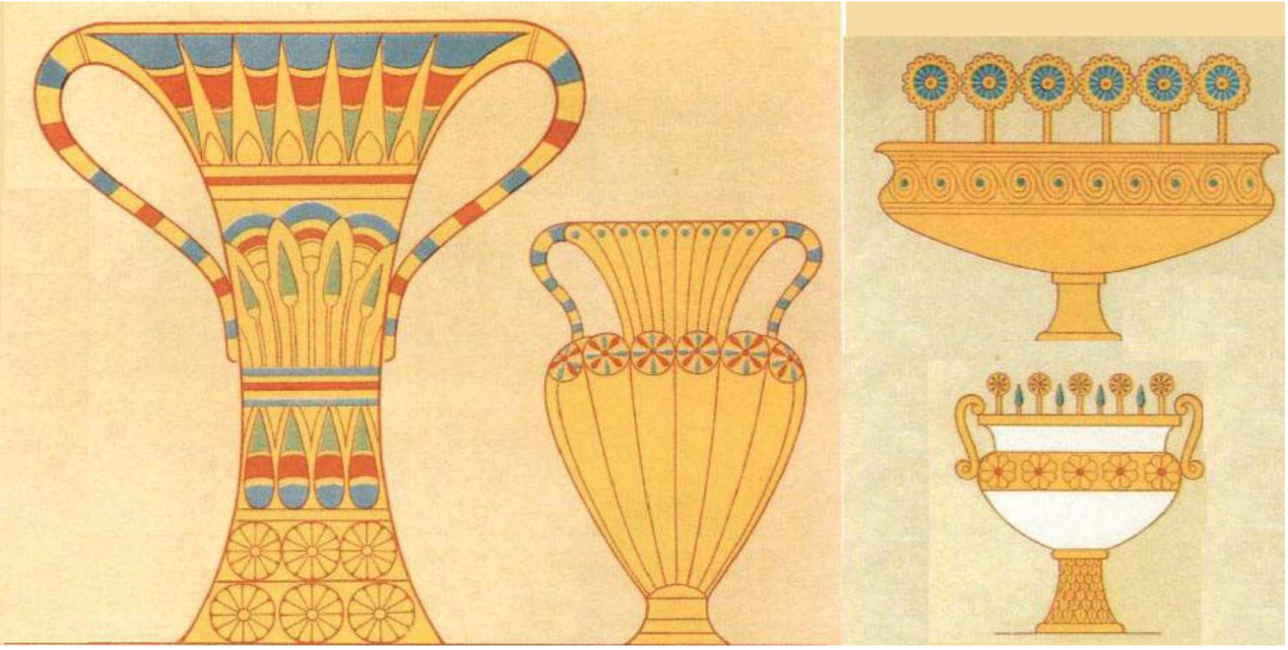
1. Il diametro biseca il cerchio. (Libro I, Definizione XVII)
2. Gli angoli alla base di un triangolo isoscele sono uguali. (Libro I, Proposizione 5)
3. Gli angoli (opposti) compresi fra due rette incidenti sono uguali. (Libro I, Proposizione 15)
4. Due triangoli aventi uguali due angoli e il lato ad essi adiacente sono uguali. (Libro I, Proposizione 26)
5. Ogni angolo inscritto in una semicirconferenza è retto. (Libro III, Proposizione 31)
6. Due triangoli equiangoli hanno i lati proporzionali. (Libro VI, Proposizione 4)
7. La somma degli angoli interni di un triangolo è pari a due angoli retti. (Libro I, Proposizione 32)

Tale attribuzione è controversa, esattamente come non è chiaro il ragionamento che avrebbe portato il matematico greco a stabilire tali risultati. L'argomento è stato oggetto di leggende come di speculazioni filosofiche.

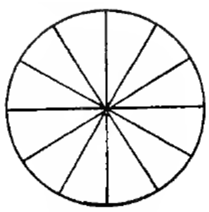
Brani significativi sono contenuti nei seguenti scritti:

- Diogene Laerzio, *Vite dei filosofi* (III secolo)
- Proclo, *Commento al Libro I degli Elementi di Euclide* (V secolo)
- George Johnston Allman, *Greek Geometry from Thales to Euclid* (1889)
- Auguste Comte, *Système de la politique positive*, vol. III (1853)
- Thomas Heath, *History of Greek Mathematics*¸vol. I (1921)

1. <u>Ispirazione artistica?</u>

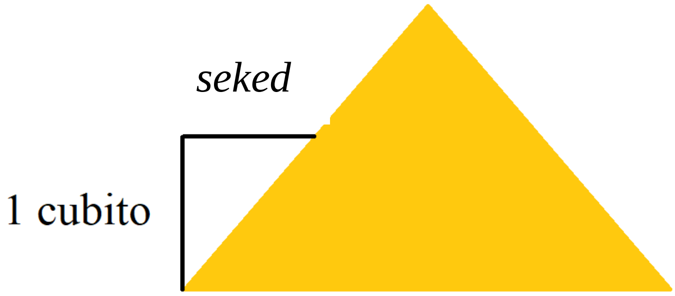


Vasi della XVIII dinastia egizia



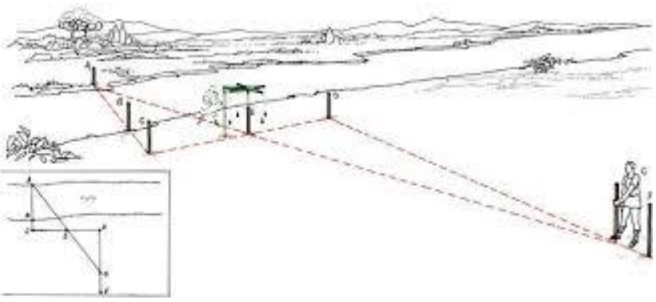
2. <u>Ispirazione architettonica?</u>

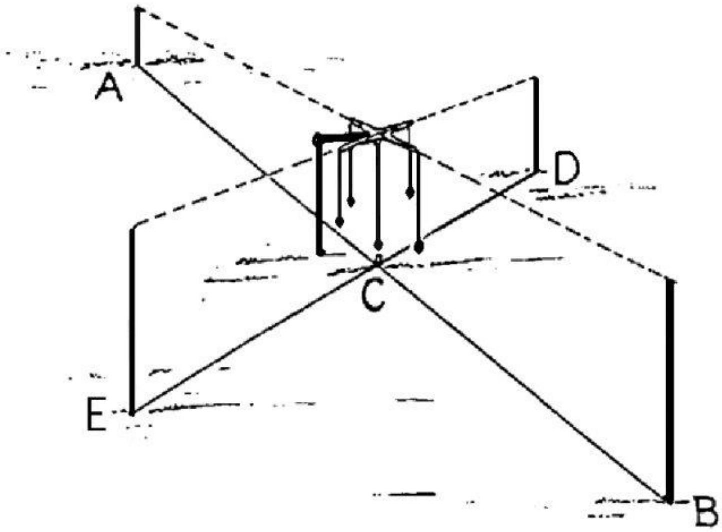
L'inclinazione delle piramidi era detta *seked*: la si misurava come lo spostamento orizzontale del muro in corrispondenza di 1 cubito di altezza.

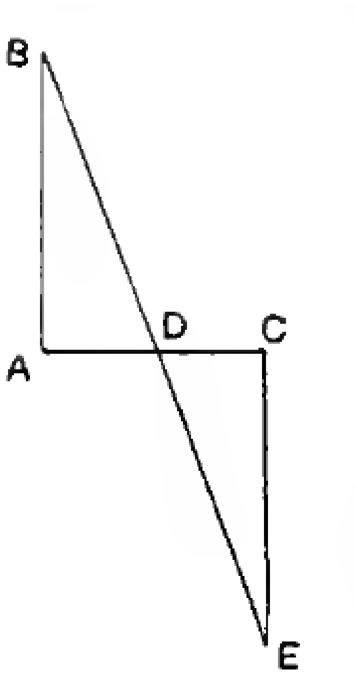


3-4. <u>Applicazione: determinazione della distanza di una nave dalla riva (varie congetture sul metodo):</u>

a)

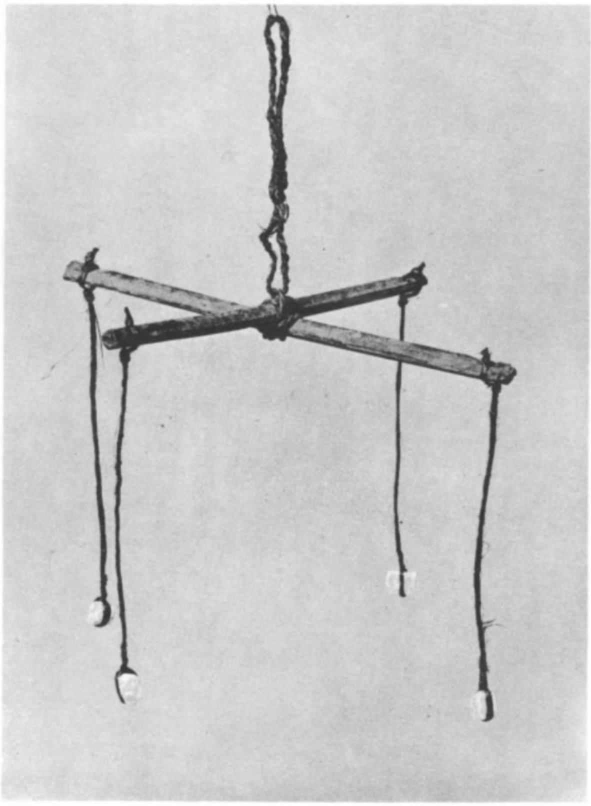


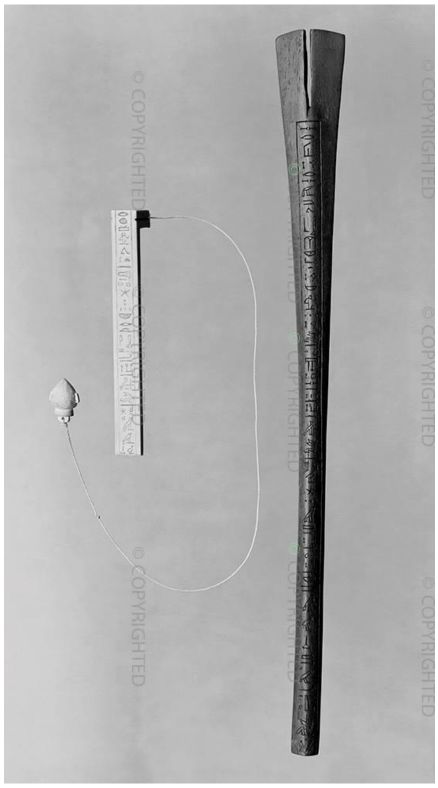




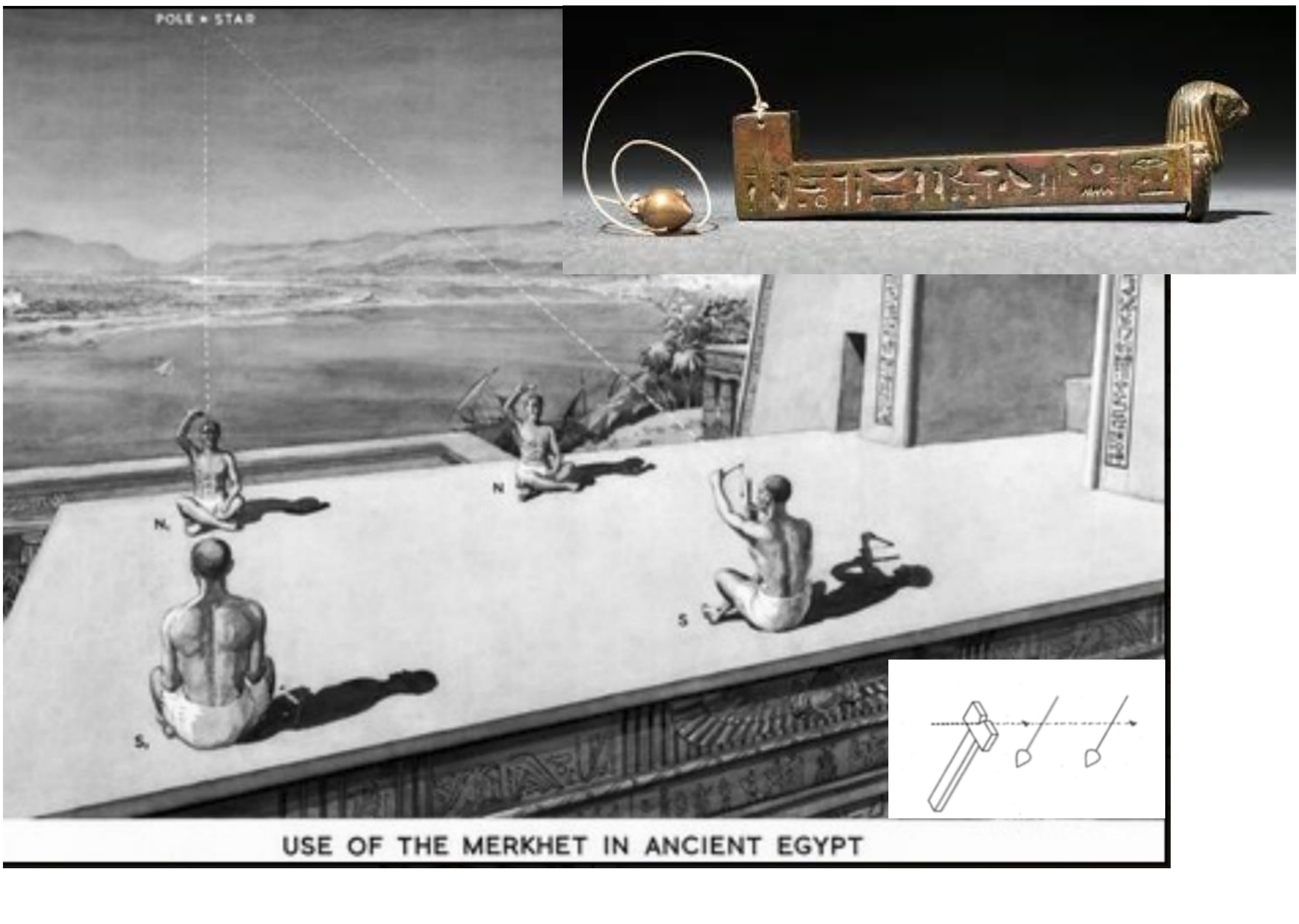
gnomóne = *gr.* GNÒMÔN propr. *che conosce*, da GNÒÔ = GI-GNÒSKÔ *conosco* dalla stessa radice del *lat.* NÒSCO = GNÒSCO *conosco* (v. *Conoscere*).
Strumento consistente in uno stilo, obelisco o simile per misurare l'altezza del sole nel suo passaggio pel meridiano; Ago dell'orologio solare, che con la sua ombra segna le ore.
[I Greci dissero così anche i denti del cavallo, dai quali si conosce l'età di esso].
Deriv. *Gnomònico-a* [= *gr.* gnômonikòs-è].

Groma romana (per tracciare congiungenti e perpendicolari) e groma egizia (sotto). La misurazione della distanza ignota (*AB*) avviene attraverso la misurazione del lato *CE* del triangolo rettangolo *DCE* congruente a *DAB*. Lo strumento egizio è di probabile origine greca; il nome latino deriva da una variante etrusca di *gnomone*.



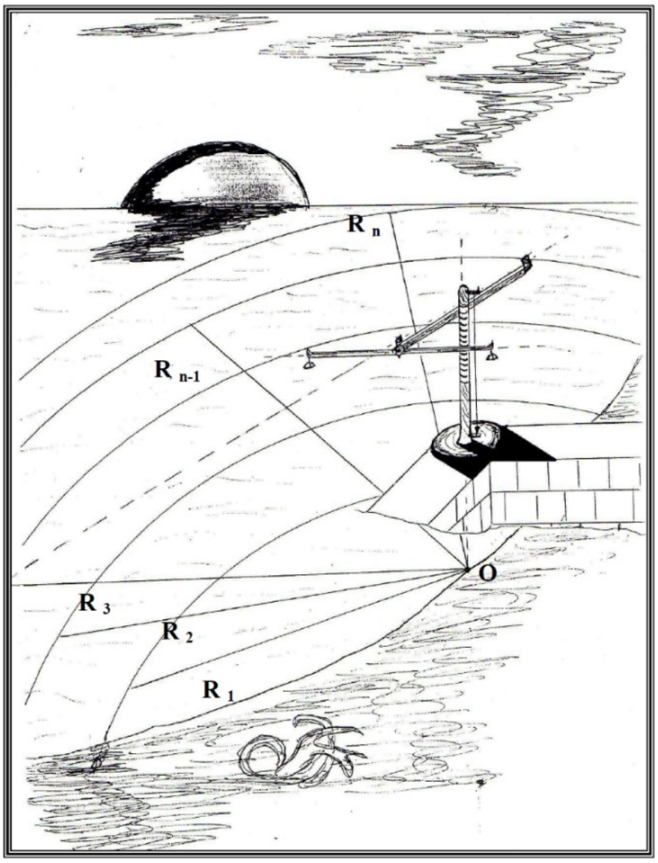


Il principio di funzionamento dello strumento è analogo a quello del *merkhet* egizio, utilizzato per individuare il piano del meridiano celeste passante per la stella polare, onde misurare il tempo con l'osservazione del moto degli astri. Un filo a piombo, inquadrato attraverso una fessura, consentiva di determinare la direzione verticale. Si noti che il nome dello strumento, traslitterato come *m rḫ.t*, significa letteralmente *conoscendo*.

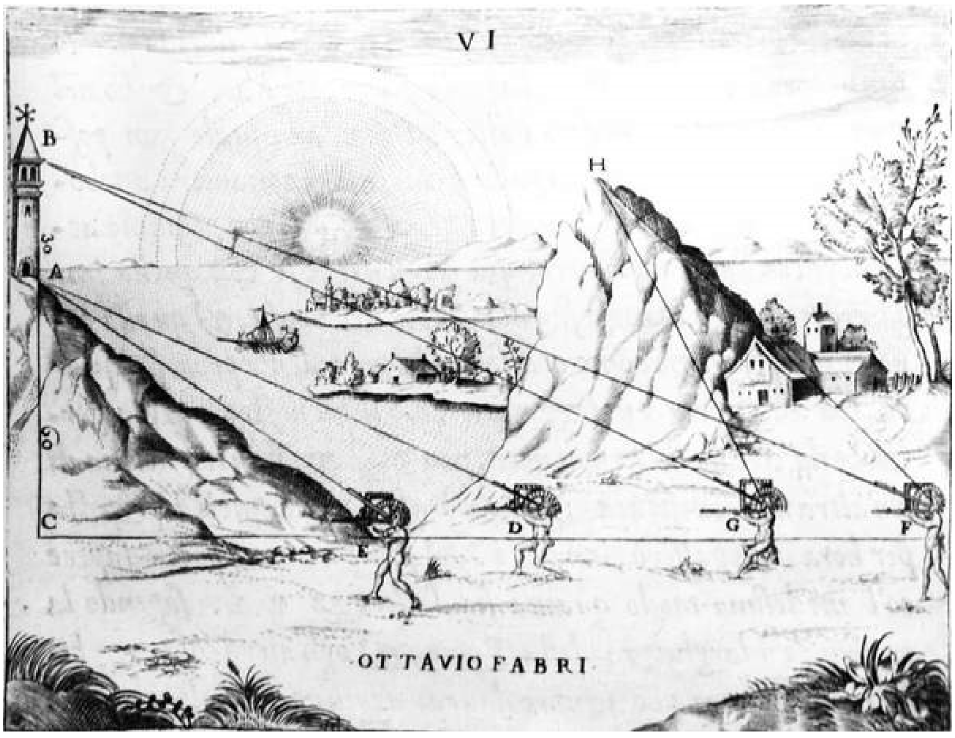


USE OF THE MERKHET IN ANCIENT EGYPT

b) La squadra mobile

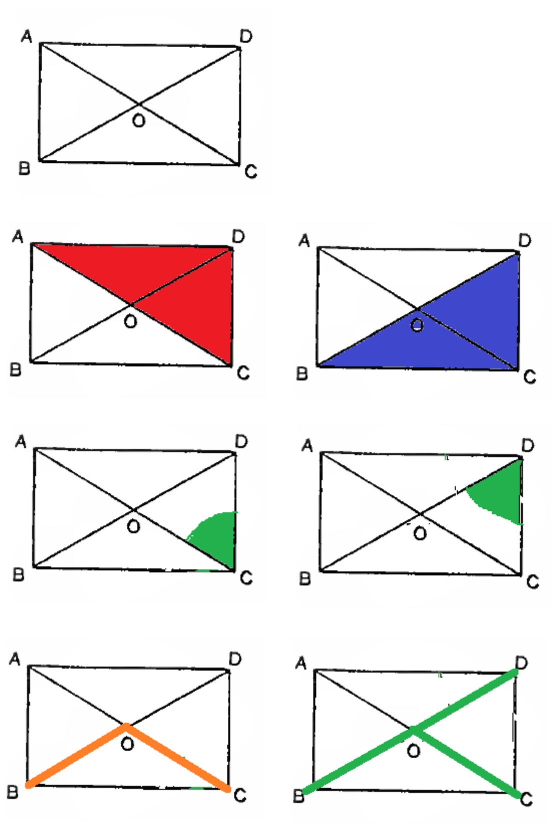


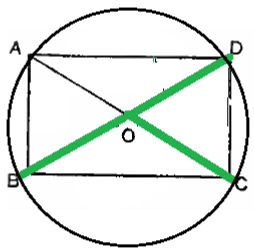
Una volta individuata l'inclinazione sotto la quale si vede un oggetto (una nave) del quale si vuole stabilire la distanza dall'osservatore, si ruota lo strumento intorno al suo supporto verticale fino a individuare un altro oggetto, che risulti raggiungibile e sia visibile sotto la medesima angolazione.

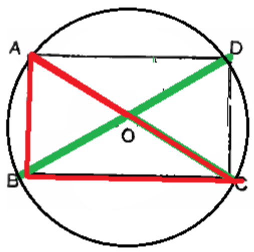


Da *L'uso della squadra mobile* (1598)

5. Come dimostrare la proposizione senza conoscere la somma degli angoli interni di un triangolo

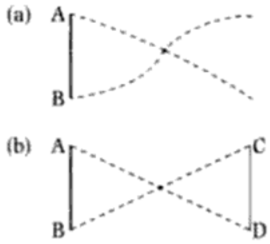




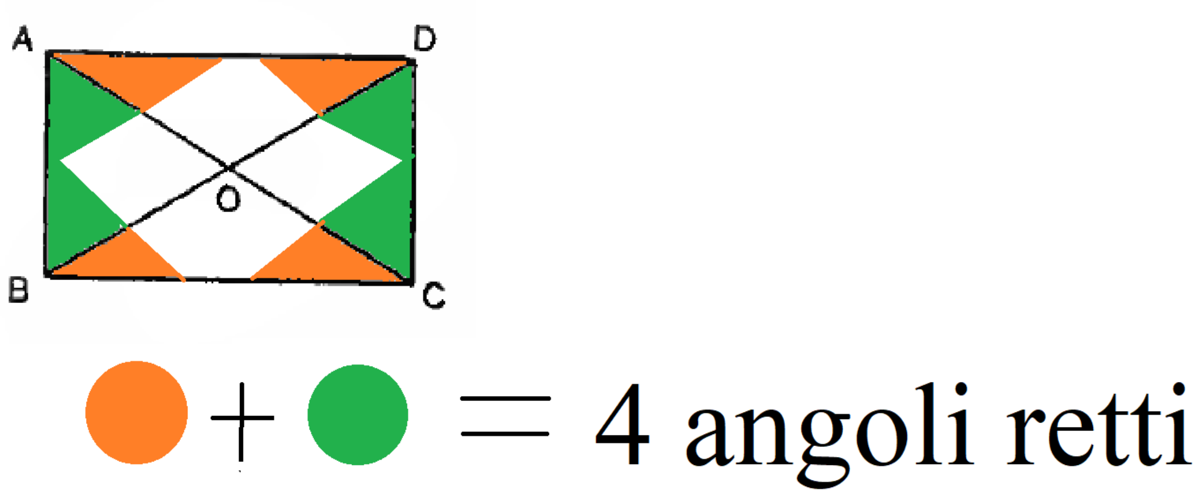


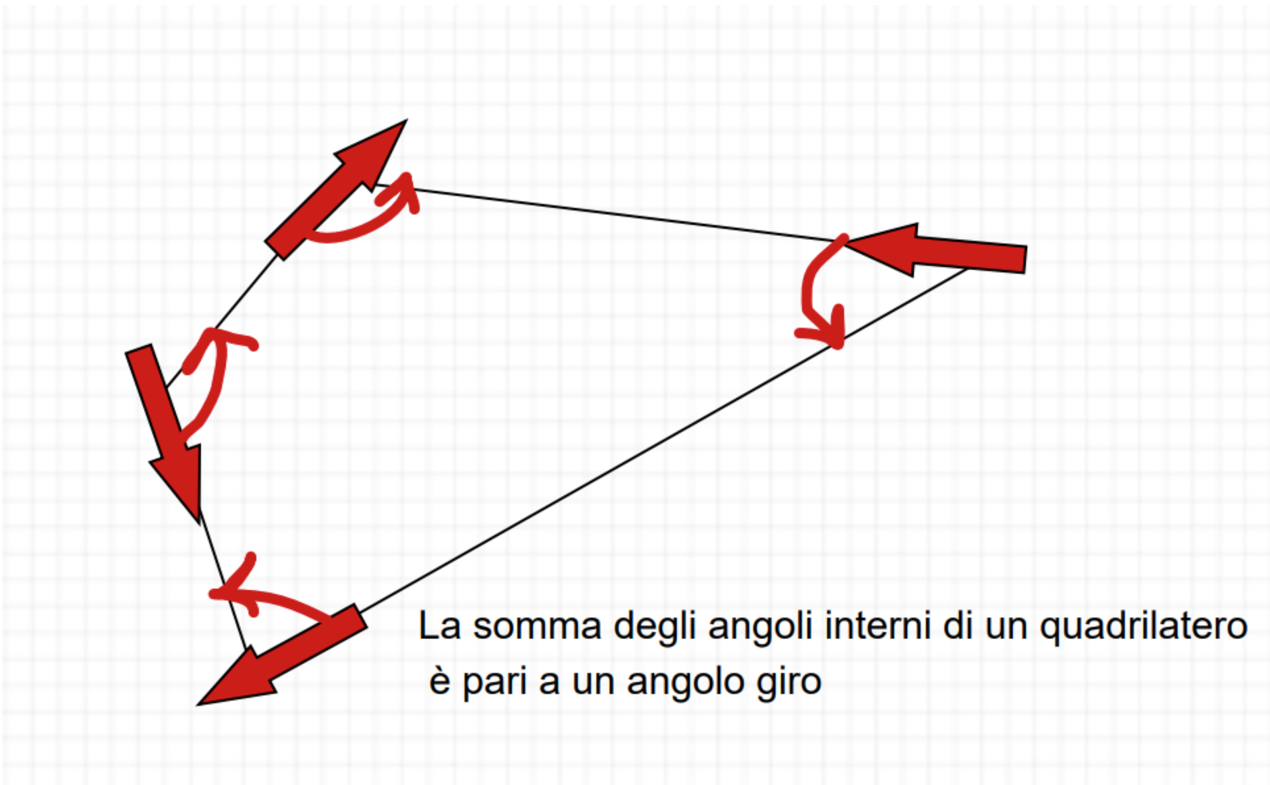
L’angolo ABC è retto, inscritto in una circonferenza.

Viceversa, dati il segmento AC, e il punto B giacente su una circonferenza avente AC come diametro, tracciando il segmento OD che prolunga OB ed è di uguale lunghezza si costruisce un quadrilatero che è necessariamente un rettangolo (le sue diagonali hanno uguale lunghezza e si bisecano reciprocamente). Segue che l’angolo ABC è retto. La proprietà citata era certamente nota agli Egizi, essendo alla base di una tecnica comunemente usata dagli agrimensori di tutte le epoche per tracciare rettangoli sul terreno, o per verificare la forma rettangolare di confini già tracciati). La pratica è tuttora seguita, ad esempio, nelle zone rurali del Mozambico (Heilbron, 2000).



Per altro, per dimostrare questa proprietà è sufficiente conoscere i citati criteri di uguaglianza per i triangoli e i loro angoli interni.





Da Thomas Heath, *History of Greek Mathematics*, vol. 1, 1921

There is even more difficulty about the dictum of Pamphile implying that Thales first discovered the fact that the angle in a semicircle is a right angle. Pamphile lived in the reign of Nero (A. D. 54–68), and is therefore a late authority. The date of Apollodorus the 'calculator' or arithmetician is not known, but he is given as only one of several authorities who attributed the proposition to Pythagoras. Again, the story of the sacrifice of an ox by Thales on the occasion of his discovery is suspiciously like that told in the distich of Apollodorus 'when Pythagoras discovered that famous proposition, on the strength of which he offered a splendid sacrifice of oxen'. But, in quoting the distich of Apollodorus, Plutarch expresses doubt whether the discovery so celebrated was that of the theorem of the square of the hypotenuse or the solution of the problem of 'application of areas'[2]; there is nothing about the discovery of the fact of the angle in a semicircle being a right angle. It may therefore be that

Diogenes Laertius was mistaken in bringing Apollodorus into the story now in question at all; the mere mention of the sacrifice in Pamphile's account would naturally recall Apollodorus's lines about Pythagoras, and Diogenes may have forgotten that they referred to a different proposition.

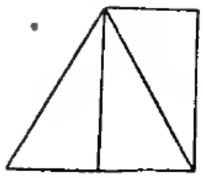
Now Euclid in III. 31 proves that the angle in a semicircle is a right angle by means of the general theorem of I. 32

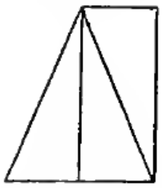
that the sum of the angles of any triangle is equal to two right angles; but if Thales was aware of the truth of the latter general proposition and proved the proposition about the semicircle in this way, by means of it, how did Eudemus come to credit the Pythagoreans, not only with the general proof, but with the *discovery*, of the theorem that the angles of any triangle are together equal to two right angles?[1]

Cantor, who supposes that Thales proved his proposition after the manner of Euclid III. 31, i.e. by means of the general theorem of I. 32, suggests that Thales arrived at the truth of the latter, not by a general proof like that attributed by Eudemus to the Pythagoreans, but by an argument following the steps indicated by Geminus. Geminus says that

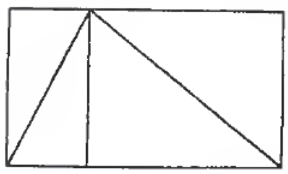
'the *ancients* investigated the theorem of the two right angles in each individual species of triangle, first in the equilateral, then in the isosceles, and afterwards in the scalene triangle, but later geometers demonstrated the general theorem that in *any* triangle the three interior angles are equal to two right angles'.[2]

The 'later geometers' being the Pythagoreans, it is assumed that the 'ancients' may be Thales and his contemporaries. As regards the equilateral triangle, the fact might be suggested by the observation that six such triangles arranged round one point as common vertex would fill up the space round that point; whence it follows that each angle is one-sixth of four right angles, and three such angles make up two right angles. Again, suppose that in either an equilateral or an isosceles





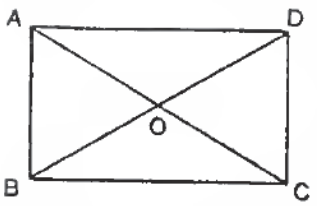
triangle the vertical angle is bisected by a straight line meeting the base, and that the rectangle of which the bisector and one half of the base are adjacent sides is completed; the rectangle is double of the half of the original triangle, and the angles of the half-triangle are together equal to half the sum of the angles of the rectangle, i.e. are equal to two right angles; and it immediately follows that the sum of the angles of the original equilateral or isosceles triangle is equal to two right angles. The same thing is easily proved of any triangle by dividing it into two right-angled triangles and completing the rectangles which are their doubles respectively, as in the figure. But the fact that a proof on these lines is just as easy in the case of the general triangle as it is for the equilateral and isosceles triangles throws doubt on the whole procedure; and we are led to question whether there is any foundation for Geminus's account at all. Aristotle has a remark that



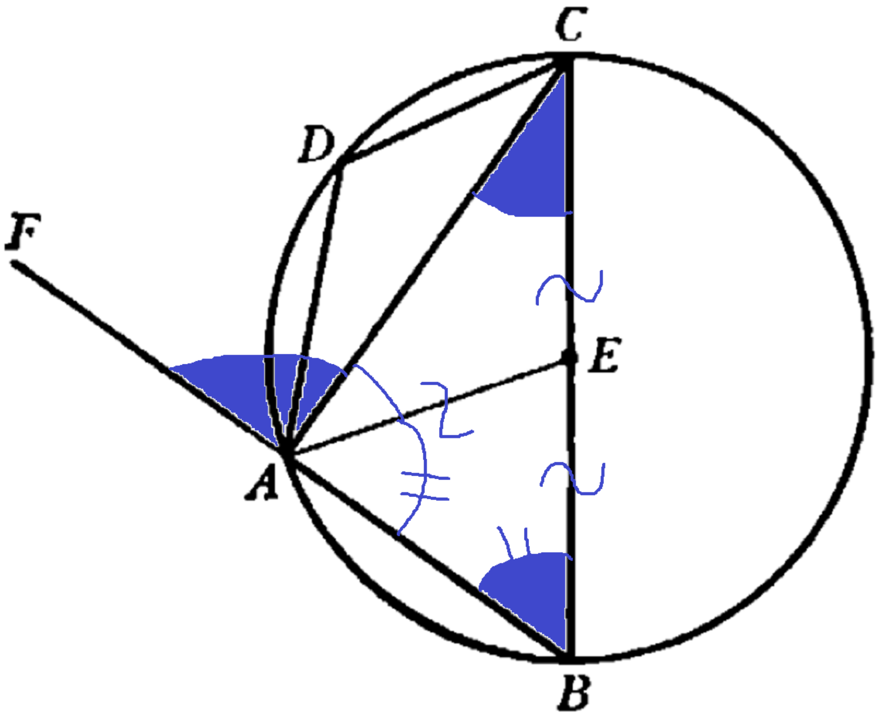
'even if one should prove, with reference to each (sort of) triangle, the equilateral, scalene, and isosceles, separately, that each has its angles equal to two right angles, either by one proof or by different proofs, he does not yet know that *the triangle*, i.e. the triangle *in general*, has its angles equal to two right angles, except in a sophistical sense, even though there exists no triangle other than triangles of the kinds mentioned. For he knows it not *quâ* triangle, nor of *every* triangle, except in a numerical sense; he does not know it *notionally* of every triangle, even though there be actually no triangle which he does not know'.[1]

It may well be that Geminus was misled into taking for a historical fact what Aristotle gives only as a hypothetical illustration, and that the exact stages by which the proposition was first proved were not those indicated by Geminus.

Could Thales have arrived at his proposition about the semicircle without assuming, or even knowing, that the sum of the angles of *any* triangle is equal to two right angles? It seems possible, and in the following way.



Many propositions were doubtless first discovered by drawing all sorts of figures and lines in them, and observing *apparent* relations of equality, &c., between parts. It would, for example, be very natural to draw a rectangle, a figure with four right angles (which, it would be found, could be drawn in practice), and to put in the two diagonals. The equality of the opposite sides would doubtless, in the first beginnings of geometry, be assumed as obvious, or verified by measurement. If then it was *assumed* that a rectangle is a figure with all its angles right angles and each side equal to its opposite, it would be easy to deduce certain consequences. Take first the two triangles ADC, BCD. Since by hypothesis $AD = BC$ and CD is common, the two triangles have the sides AD, DC respectively equal to the sides BC, CD, and the included angles, being right angles, are equal; therefore the triangles ADC, BCD are equal in all respects (cf. Eucl. I. 4), and accordingly the angles ACD (i.e. OCD) and BDC (i.e. ODC) are equal, whence (by the converse of Eucl. I. 5, known to Thales) $OD = OC$. Similarly by means of the equality of AB, CD we prove the equality of OB, OC. Consequently OB, OC, OD (and OA) are all equal. It follows that a circle with centre O and radius OA passes through B, C, D also; since AO, OC are in a straight line, AC is a diameter of the circle, and the angle ABC, by hypothesis a right angle, is an 'angle in a semicircle'. It would then appear that, given any right angle as ABC standing on AC as base, it was only necessary to bisect AC at O, and O would then be the centre of a semicircle on AC as diameter and passing through B. The construction indicated would be the construction of a circle about the right-angled triangle ABC, which seems to correspond well enough to Pamphile's phrase about 'describing on (i.e. in) a circle a triangle (which shall be) right angled'.



Ora, poiché BE è uguale ad EA, anche l'angolo ABE è uguale all'angolo BAE (I, 5). Di nuovo, poiché CE è uguale ad EA, pure l'angolo ACE è uguale all'angolo CAE (id.); quindi tutto quanto l'angolo BAC è uguale alla somma dei due angoli ABC, ACB (noz. com. II). Ma nel triangolo ABC pure l'angolo esterno FAC è uguale alla somma dei due angoli ABC, ACB (I, 32), per cui anche gli angoli BAC, FAC sono uguali fra loro (noz. com. I); ciascuno dei due è quindi retto (I, def. X); dunque l'angolo alla circonferenza BAC, iscritto nel semicerchio BAC, è retto.

PROPOSIZIONE 32.

In ogni triangolo, se si prolunga uno dei lati, l'angolo esterno è uguale alla somma dei due angoli interni ed opposti, e la somma dei tre angoli interni del triangolo è uguale a due retti [27].

Esempi di “applicazione di aree”

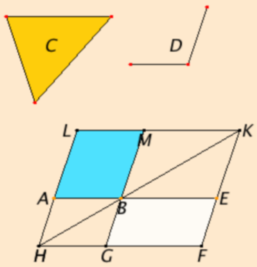
Book I

Proposition 44

To a given straight line in a given rectilinear angle, to apply a parallelogram equal to a given triangle.

Let *AB* be the given straight line, *D* the given rectilinear angle, and *C* the given triangle.

It is required to apply a parallelogram equal to the given triangle *C* to the given straight line *AB* in an angle equal to *D*.



Construct the parallelogram *BEFG* equal to the triangle *C* in the angle *EBG* which equals *D*, and let it be placed so that *BE* is in a straight line with *AB*. I.42

Draw *FG* through to *H*, and draw *AH* through *A* parallel to either *BG* or *EF*. Join *HB*. I.Post.2 I.31, I.Post.1

Since the straight line *HF* falls upon the parallels *AH* and *EF*, therefore the sum of the angles *AHF* and *HFE* equals two right angles. Therefore the sum of the angles *BHG* and *GFE* is less than two right angles. And straight lines produced indefinitely from angles less than two right angles meet, therefore *HB* and *FE*, when produced, will meet. I.29 I.Post.5

Let them be produced and meet at *K*. Draw *KL* through the point *K* parallel to either *EA* or *FH*. Produce *HA* and *GB* to the points *L* and *M*. I.31

Then *HLKF* is a parallelogram, *HK* is its diameter, and *AG* and *ME* are parallelograms, and *LB* and *BF* are the so-called complements about *HK*. Therefore *LB* equals *BF*. I.43

But *BF* equals the triangle *C*, therefore *LB* also equals *C*. C.N.1

Since the angle *GBE* equals the angle *ABM*, while the angle *GBE* equals *D*, therefore the angle *ABM* also equals the angle *D*. I.15, C.N.1

Therefore the parallelogram *LB* equal to the given triangle *C* has been applied to the given straight line *AB*, in the angle *ABM* which equals *D*.

Q.E.F.

Book II

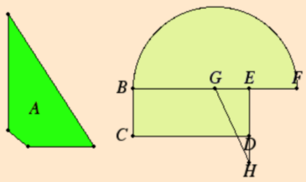
Proposition 14

To construct a square equal to a given rectilinear figure.

Let *A* be the given rectilinear figure.

It is required to construct a square equal to the rectilinear figure *A*.

Construct the rectangular parallelogram *BD* equal to the rectilinear figure *A*. I.45



Then, if *BE* equals *ED*, then that which was proposed is done, for a square *BD* has been constructed equal to the rectilinear figure *A*.

But, if not, one of the straight lines *BE* or *ED* is greater.

Let *BE* be greater, and produce it to *F*. Make *EF* equal to *ED*, and bisect *BF* at *G*. I.3, I.10

Describe the semicircle *BHF* with center *G* and radius one of the straight lines *GB* or *GF*. Produce *DE* to *H*, and join *GH*. I.Def.18

Then, since the straight line *BF* has been cut into equal segments at *G* and into unequal segments at *E*, the rectangle *BE* by *EF* together with the square on *EG* equals the square on *GF*. II.5

But *GF* equals *GH*, therefore the rectangle *BE* by *EF* together with the square on *GE* equals the square on *GH*.

But the sum of the squares on *HE* and *EG* equals the square on *GH*, therefore the rectangle *BE* by *EF* together with the square on *GE* equals the sum of the squares on *HE* and *EG*. I.47

Subtract the square on *GE* from each. Therefore the remaining rectangle *BE* by *EF* equals the square on *EH*.

But the rectangle *BE* by *EF* is *BD*, for *EF* equals *ED*, therefore the parallelogram *BD* equals the square on *HE*.

And *BD* equals the rectilinear figure *A*.

Therefore the rectilinear figure *A* also equals the square which can be described on *EH*.

Therefore a square, namely that which can be described on *EH*, has been constructed equal to the given rectilinear figure *A*.

Q.E.F.

I triangoli in Euclide

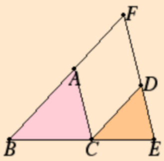
Book VI

Proposition 4

In equiangular triangles the sides about the equal angles are proportional where the corresponding sides are opposite the equal angles.

Let *ABC* and *DCE* be equiangular triangles having the angle *ABC* equal to the angle *DCE,* the angle *BAC* equal to the angle *CDE,* and the angle *ACB* equal to the angle *CED.*

I say that in the triangles *ABC* and *DEC* the sides about the equal angles are proportional where the corresponding sides are opposite the equal angles.



Let *BC* be placed in a straight line with *CE.*

Then, since the sum of the angles *ABC* and *ACB* is less than two right angles, and the angle *ACB* equals the angle *DEC,* therefore the sum of the angles *ABC* and *DEC* is less than two right angles. Therefore *BA* and *ED,* when produced, will meet. Let them be produced and meet at *F.* I.17 I.Post.5

Now, since the angle *DCE* equals the angle *ABC, DC* is parallel to *FB.* Again, since the angle *ACB* equals the angle *DEC, AC* is parallel to *FE.* I.28

Therefore *FACD* is a parallelogram, therefore *FA* equals *DC,* and *AC* equals *FD.* I.34

And, since *AC* is parallel to a side *FE* of the triangle *FBE,* therefore *BA* is to *AF* as *BC* is to *CE.* VI.2

But *FD* equals *AC,* therefore *BC* is to *CE* as *AC* is to *DE,* and alternately *BC* is to *CA* as *CE* is to *ED.* V.7 V.16

Since then it was proved that *AB* is to *BC* as *DC* is to *CE,* and *BC* is to *CA* as *CE* is to *ED,* therefore, *ex aequali, BA* is to *AC* as *CD* is to *DE.* V.22

Therefore, *in equiangular triangles the sides about the equal angles are proportional where the corresponding sides are opposite the equal angles.*

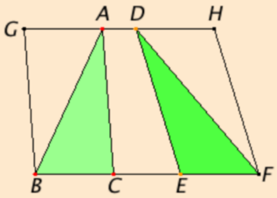
Q.E.D.

Book I

Proposition 38

Triangles which are on equal bases and in the same parallels equal one another.

Let *ABC* and *DEF* be triangles on equal bases *BC* and *EF* and in the same parallels *BF* and *AD.*



I say that the triangle *ABC* equals the triangle *DEF.*

Produce *AD* in both directions to *G* and *H.* Draw *BG* through *B* parallel to *CA,* and draw *FH* through *F* parallel to *DE.* I.Post.2 I.31

Then each of the figures *GBCA* and *DEFH* is a parallelogram, and *GBCA* equals *DEFH,* for they are on equal bases *BC* and *EF* and in the same parallels *BF* and *GH.* I.36

Moreover the triangle *ABC* is half of the parallelogram *GBCA,* for the diameter *AB* bisects it. And the triangle *FED* is half of the parallelogram *DEFH,* for the diameter *DF* bisects it. I.34

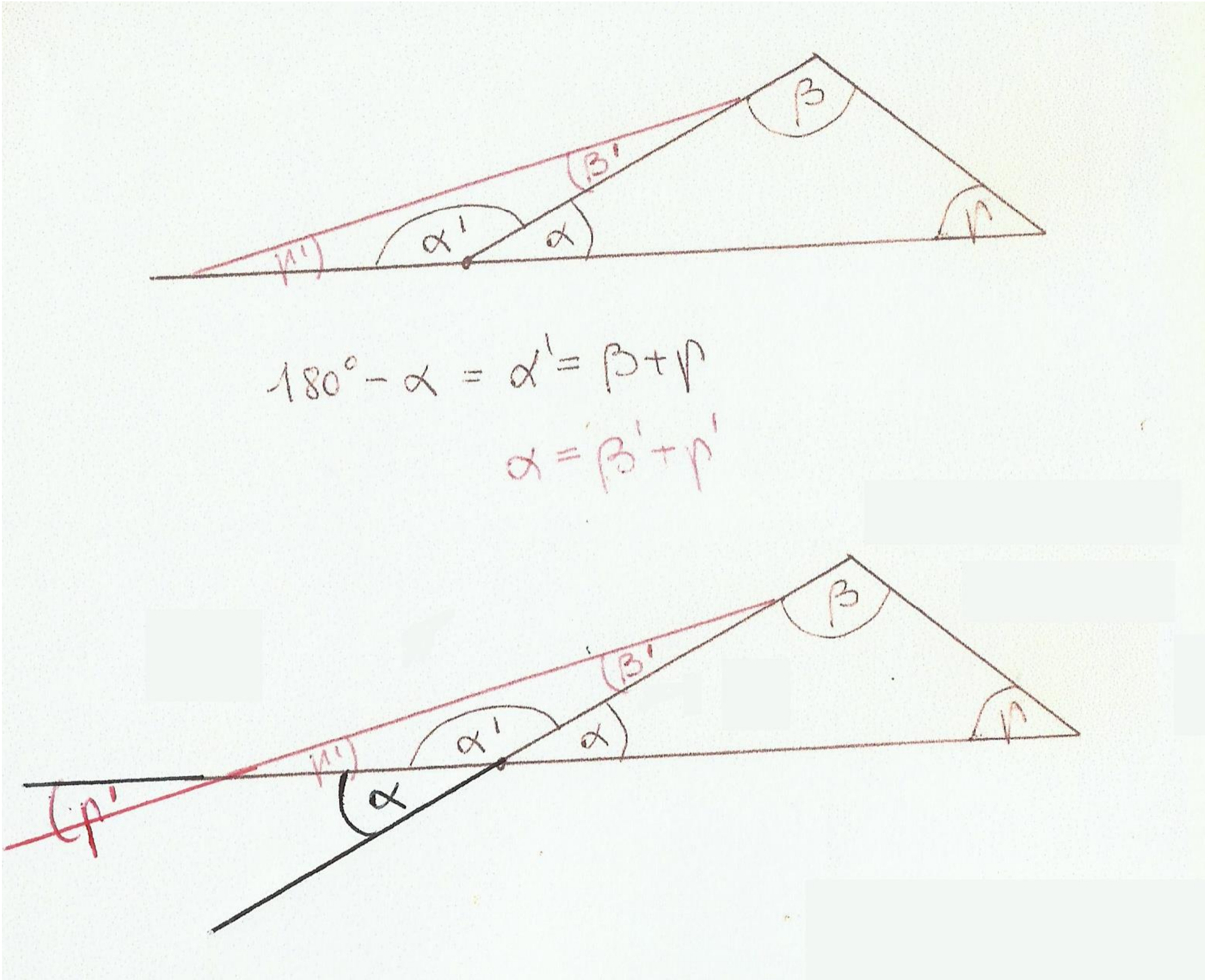
Therefore the triangle *ABC* equals the triangle *DEF.* C.N.

Therefore *triangles which are on equal bases and in the same parallels equal one another.*

Q.E.D.

Leggendo Auguste Comte

1. <u>La somma degli angoli interni di un triangolo</u>



2. <u>La proporzionalità dei lati dei triangoli simili a partire dalle aree</u>

Rivedendo Euclide:

VI.2. *If a straight line be drawn parallel to one of the sides of a triangle, it will cut the sides of the triangle proportionally; and [conversely].*

VI.1. *Triangles and parallelograms which are under the same height are to one another as their bases.*

Height here refers to perpendicular height, and by the ratio of two triangles "to one another" is meant the ratio of their areas. In modern parlance, VI.1 states that the ratio of the area of two triangles with the same height is equal to the ratio of their bases, and this result also holds for parallelograms. For triangles with commensurable bases, Euclid's proof of VI.1 begins by constructing whole number multiples of the two bases to arrive at two triangles with equal bases. The result then follows from I.38, discussed in the introduction. Issues of incommensurability are addressed via the Eudoxan theory of proportion.

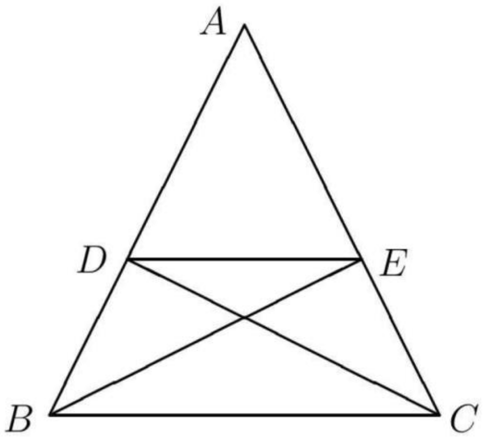


Figure 1: Proposition VI.2.

To prove VI.2, Euclid begins with triangle *ABC* (not necessarily isosceles) and constructs *DE* parallel to *BC* (Figure 1). Note that triangles *DEB* and *DEC* have the same area, since they are on the same base *DE* and are in the same parallels (between *DE* and *BC*). It follows that triangle *ABE* and triangle *ACD* have the same area. A modern interpretation of Euclid would read

$$\frac{\text{Area (triangle } ABE)}{\text{Area (triangle } DEB)} = \frac{\text{Area (triangle } ACD)}{\text{Area (triangle } DEC)}.$$

Since triangles *ABE* and *DEB* are under the same height, they are to one another as their bases, and similarly for triangle *ACD* and triangle *DEC*. Thus,

$$\frac{\text{Area (triangle } ABE)}{\text{Area (triangle } DEB)} = \frac{AB}{DB}, \qquad \frac{\text{Area (triangle } ACD)}{\text{Area (triangle } DEC)} = \frac{AC}{EC}.$$

It follows that *AB*/*DB* = *AC/EC*.

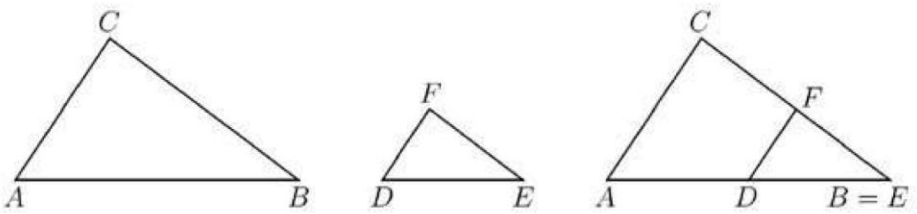


Figure 2: Proposition VI.4.

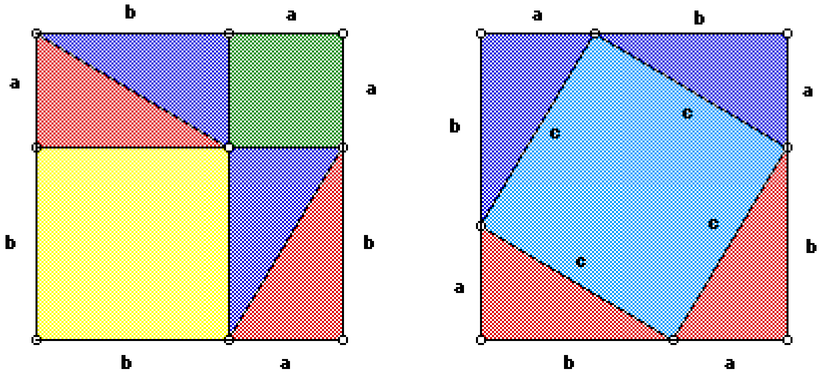
To prove VI.4 quickly, begin with similar triangles *ABC* and *DEF* and construct triangle *DEF* inside triangle *ABC* along a congruent pair of angles (Figure 2). The result then follows from Proposition VI.2, and a general position argument stating that triangle *DEF* could be constructed inside triangle *ABC* along any pair of congruent angles. Euclid, however, avoids a general argument in favor of a more literal proof. (See [1]).

Jerry Lodder (New Mexico State University), "Proportionality in Similar Triangles: A Cross-Cultural Comparison - The Ancient Greek Contribution," *Convergence* (July 2010)

---

3. La geometria delle linee e il Teorema di Pitagora

a) Dimostrazione attribuita a Pitagora:



b) Dimostrazione di Euclide:

Book I

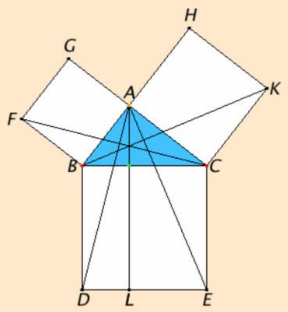
Proposition 47

In right-angled triangles the square on the side opposite the right angle equals the sum of the squares on the sides containing the right angle.

Let *ABC* be a right-angled triangle having the angle *BAC* right.

I say that the square on *BC* equals the sum of the squares on *BA* and *AC*.

Describe the square *BDEC* on *BC,* and the squares *GB* and *HC* on *BA* and *AC.* Draw *AL* through *A* parallel to either *BD* or *CE,* and join *AD* and *FC.* I.46 I.31, I.Post.1



Since each of the angles *BAC* and *BAG* is right, it follows that with a straight line *BA,* and at the point *A* on it, the two straight lines *AC* and *AG* not lying on the same side make the adjacent angles equal to two right angles, therefore *CA* is in a straight line with *AG.* I.Def.22 I.14

For the same reason *BA* is also in a straight line with *AH.*

Since the angle *DBC* equals the angle *FBA,* for each is right, add the angle *ABC* to each, therefore the whole angle *DBA* equals the whole angle *FBC.* I.Def.22 I.Post.4 C.N.2

Since *DB* equals *BC,* and *FB* equals *BA,* the two sides *AB* and *BD* equal the two sides *FB* and *BC* respectively, and the angle *ABD* equals the angle *FBC,* therefore the base *AD* equals the base *FC,* and the triangle *ABD* equals the triangle *FBC.* I.Def.22 I.4

Now the parallelogram *BL* is double the triangle *ABD,* for they have the same base *BD* and are in the same parallels *BD* and *AL.* And the square *GB* is double the triangle *FBC,* for they again have the same base *FB* and are in the same parallels *FB* and *GC.*

Therefore the parallelogram *BL* also equals the square *GB.* I.41

Similarly, if *AE* and *BK* are joined, the parallelogram *CL* can also be proved equal to the square *HC.* Therefore the whole square *BDEC* equals the sum of the two squares *GB* and *HC.*

And the square *BDEC* is described on *BC,* and the squares *GB* and *HC* on *BA* and *AC.* C.N.2

Therefore the square on *BC* equals the sum of the squares on *BA* and *AC.*

Therefore *in right-angled triangles the square on the side opposite the right angle equals the sum of the squares on the sides containing the right angle..*

Q.E.D.

Osservazione: La presenza preponderante della *geometria delle linee* nella precedente dimostrazione euclidea non toglie, però, che il Teorema di Pitagora sia un teorema sulle aree (e sul rapporto fra le aree delle figure simili). Lo evidenzia la sua generalizzazione, presentata come Proposizione 31 del Libro VI:

Book VI

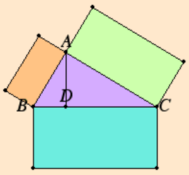
Proposition 31

In right-angled triangles the figure on the side opposite the right angle equals the sum of the similar and similarly described figures on the sides containing the right angle.

Let *ABC* be a right-angled triangle having the angle *BAC* right.

I say that the figure on *BC* equals the sum of the similar and similarly described figures on *BA* and *AC.*

Draw the perpendicular *AD.* I.12



Then, since in the right-angled triangle *ABC, AD* has been drawn from the right angle at *A* perpendicular to the base *BC,* therefore the triangles *DBA* and *DAC* adjoining the perpendicular are similar both to the whole *ABC* and to one another. VI.8

And, since *ABC* is similar to *DBA,* therefore *BC* is to *BA* as *BA* is to *BD.* VI.Def.1

And, since three straight lines are proportional, the first is to the third as the figure on the first is to the similar and similarly described figure on the second. VI.19,Cor

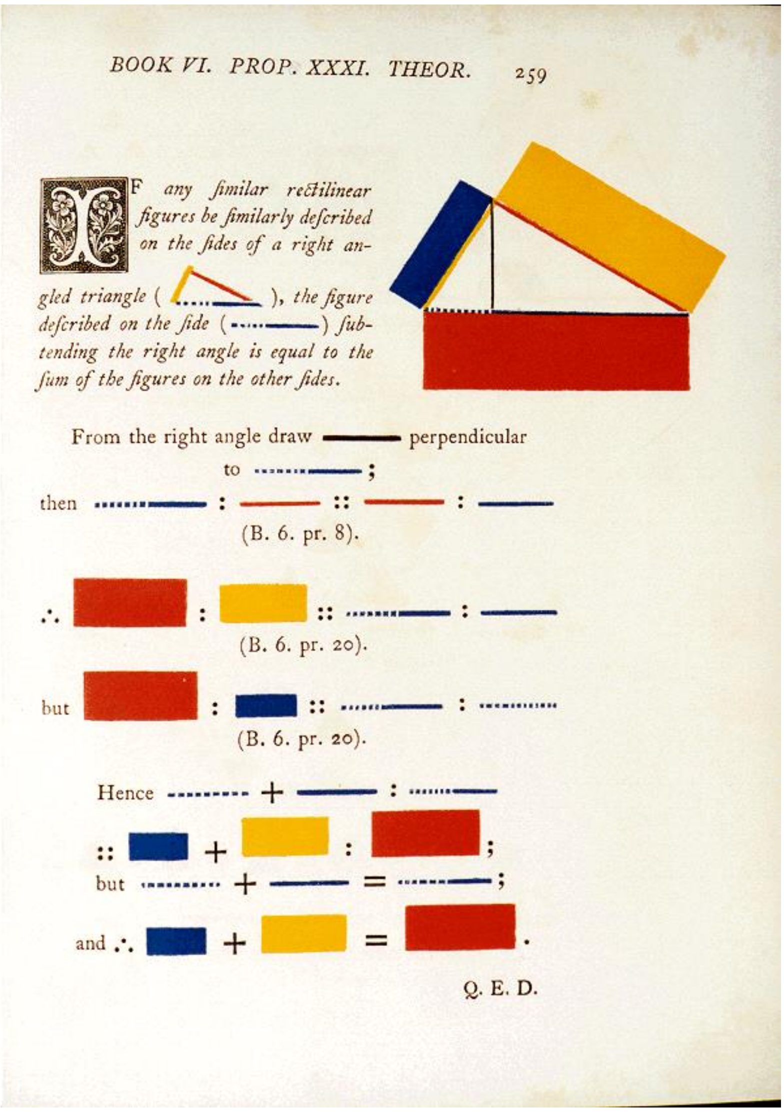
Therefore *BC* is to *BD* as the figure on *BC* is to the similar and similarly described figure on *BA.*

For the same reason also, *BC* is to *CD* as the figure on *BC* is to that on *CA,* so that, in addition, *BC* is to the sum of *BD* and *DC* as the figure on *BC* is to the sum of the similar and similarly described figures on *BA* and *AC.* V.24

But *BC* equals the sum of *BD* and *DC,* therefore the figure on *BC* equals the sum of the similar and similarly described figures on *BA* and *AC.*

Therefore, *in right-angled triangles the figure on the side opposite the right angle equals the sum of the similar and similarly described figures on the sides containing the right angle.*

Q.E.D.



Dall'edizione didattica di Oliver Byrne (1847)

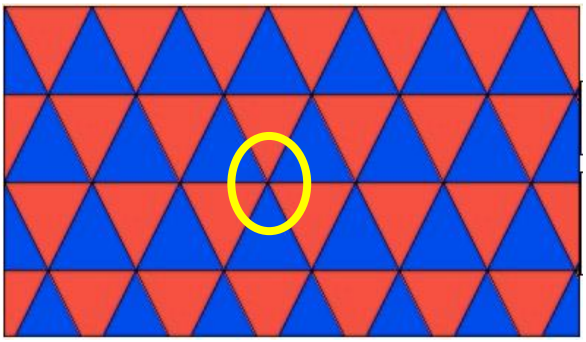
La geometria delle linee

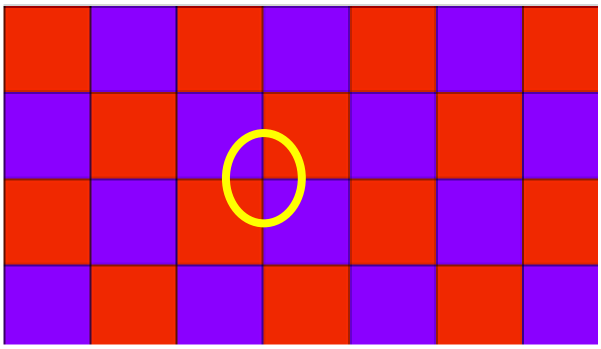
Nella geometria arcaica, la linea prende significato solo in quanto tratto che delimita un'area, e la cui misura interviene aritmeticamente nella determinazione di quest'ultima. Il suo ruolo è evidenziato, ad esempio, dai nomi attribuiti ai lati di un rettangolo (*lunghezza, larghezza*), e alla circonferenza (*arco*, ossia, linea curva), che ne rispecchiano la dipendenza dalla forma della figura che racchiudono. La linea comincia ad acquisire una funzione autonoma nel momento in cui smette di essere il contorno di un contenuto che deve essere quantificato in senso assoluto (tramite, ad esempio, il numero di *hekat* di un campo) o relativo (come nel caso della trasversale che biseca un trapezio).
Allora, ad assumere rilevanza è il suo "percorso", che indica

- il collegamento tra punti;
- la posizione reciproca di punti.

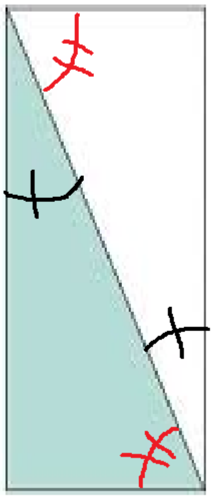
Entrambe le informazioni possono avere una valenza *dinamica*, in quanto atte a descrivere un particolare momento o effetto di un movimento: l'allineamento di corpi celesti, lo spostamento determinato da una rotazione. L'ispirazione, negli esempi citati, proviene dall'astronomia, che, come ci viene ricordato dai testi dedicati ai riti egizi di fondazione degli edifici, serviva, originariamente, soprattutto per la misurazione del tempo (fasi lunari) e la determinazione delle direzioni (punti cardinali).

Ora: la geometria delle aree e quella delle linee sembrano vivere in mondi separati: la prima sulla terra, la seconda in cielo. Sappiamo, però, che nell'evoluzione successiva (matematica greca), questa distinzione è destinata a svanire. Occorre dunque immaginare un luogo di raccordo, in cui, ad esempio, l'area, pur presente, sfumi, per lasciare in primo piano la linea, divenuta interessante di per sé, presa singolarmente, in virtù della sua collocazione all'interno di una certa configurazione spaziale. Potrebbe essere nata in questo modo, in Talete, l'idea del teorema sulla somma degli angoli interni di un triangolo. Questa gli sarebbe stata suggerita dall'osservazione, in Egitto, di alcune tassellature di pavimenti realizzati con triangoli equilateri o quadrati:



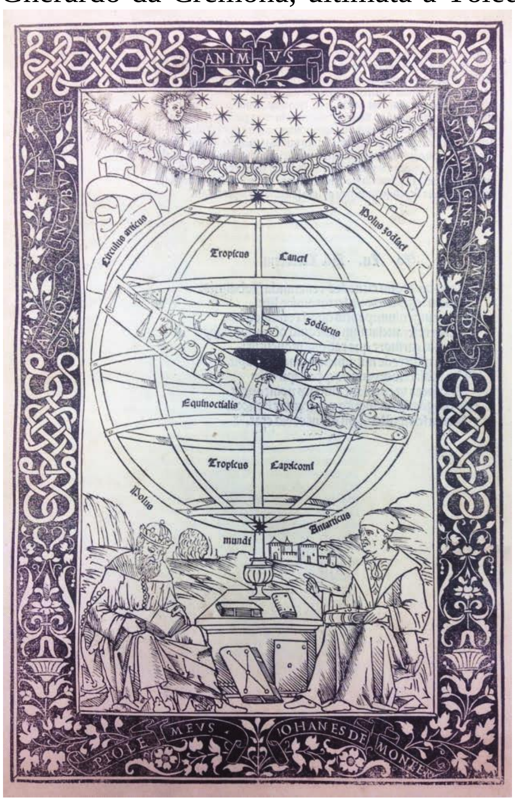


Se si mette a fuoco uno qualsiasi dei vertici dei triangoli o quadrati, si nota unicamente una raggiera di linee che in quel punto si incontrano. La simmetria della configurazione suggerisce un'uguaglianza tra ciò che separa due linee consecutive, che non è un'area chiusa, ma qualcosa di interpretabile come un'*ampiezza*. Indipendentemente dalla possibilità di attribuire a quest'ultima una misura numerica, salta all'occhio la sua esprimibilità in senso relativo, come la sesta (o quarta) parte dell'angolo giro (equivalente a quattro angoli retti). Ritornando al triangolo equilatero, si ritroverà quell'ampiezza, internamente, in corrispondenza di ciascuno dei vertici. Tre di queste ampiezze equivalgono quindi a



due angoli retti. La stessa proprietà si può dedurre, nella seconda figura, per un triangolo rettangolo isoscele (ciascuna delle metà in cui un quadrato è suddiviso da una diagonale). Da questa osservazione può essere scaturita la generalizzazione ad ogni triangolo rettangolo, deducibile facilmente attraverso il completamento ad un rettangolo. Un'ulteriore indagine empirica, basata sull'esame di vari triangoli rettangoli aventi la stessa ipotenusa, potrebbe aver richiamato l'attenzione di Talete sull'invarianza della distanza tra il punto medio della stessa e il vertice opposto, gettando le basi per l'altro famoso teorema. Si noti come tutte queste considerazioni riguardino unicamente le posizioni reciproche fra le linee.
Benché si tratti ancora di linee nate per effettuare una suddivisione, non si tratta più di una ripartizione di aree, ma dello spazio nel suo complesso, illimitato, come può essere, ad esempio, la volta celeste.

Non a caso proprietà di questo tipo sono alla base dell'enunciato noto come ***Teorema di Tolomeo***, riguardante i quadrilateri ciclici (ossia inscrivibili in una circonferenza). La proprietà – non si sa se già presente nell'opera di Ipparco di Nicea (200-120 a. C.), andata perduta – si trova all'inizio dell'***Almagesto*** (metà del I secolo d.C.). Il titolo originale del trattato, redatto in greco, è *Collezione matematica*, mentre il nome con cui è passato alla storia è invenzione del primo traduttore arabo (o forse, secondo alcuni, persiano), che si sarebbe ispirato al termine greco per indicare *il massimo* (μέγιστος). È un compendio di astronomia, ed ebbe grande diffusione nel Vicino Oriente e in Occidente, fino al Cinquecento. In Europa la fonte principale fu la traduzione in latino effettuata da Gherardo da Cremona, ultimata a Toledo nel 1175, cui seguì la non meno nota epitome a cura del

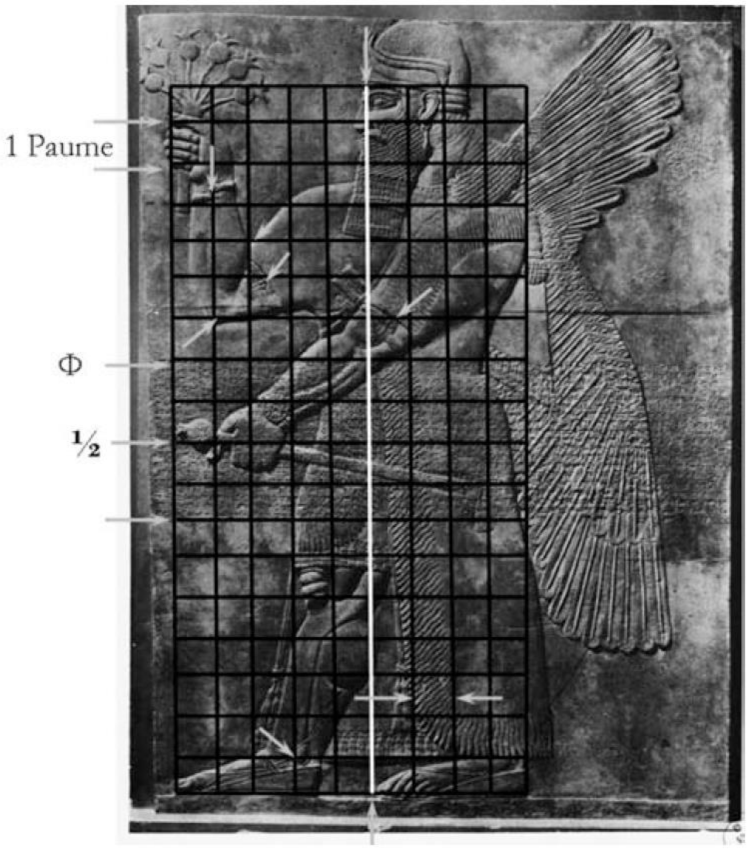


matematico tedesco Regiomontano (Johannes Müller da Königsberg), iniziata dal suo maestro Georg von Purbach, da lui portata a termine a Venezia, e pubblicata postuma nel 1496 (nell'immagine qui a lato, il frontespizio).

Nel sistema tolemaico, geocentrico, la Luna, il Sole ed i cinque pianeti (Mercurio, Venere, Marte, Giove, Saturno) ruotano intorno alla Terra, in quiete; il loro moto avviene su circonferenze poste su un piano, inclinato rispetto all'equatore, detto *eclittica*, che compie un giro completo, procedendo da est ad ovest, in 24 ore. Il tutto è racchiuso dalla sfera delle cosiddette *stelle fisse*, che ruota anch'essa intorno alla Terra. La proiezione del cielo sul piano dell'equatore è un cerchio, che viene suddiviso in 360 gradi (riprendendo una tradizione tardo-mesopotamica), e nel quale sono individuati 12 settori di 30 gradi, corrispondenti ai dodici segni dello Zodiaco. Il diametro del cerchio è suddiviso in 120 parti uguali, assunte come unità di misura. A questa viene riferita la misura dei vari settori circolari, che viene ricondotta, però, non alla lunghezza del relativo arco, bensì a quella della ***corda*** ad esso sottesa. Nasce così la disciplina che molto più tardi, nel Cinquecento, comincerà ad essere chiamata *trigonometria*. Si tratta, di fatto, di uno studio riguardante la misura (sia pur indiretta) degli angoli (*goniometria*) al centro di settori circolari, ma il riferimento al τρίγωνον è giustificato, a posteriori, dal fatto che la determinazione delle corde viene ricondotta alle proprietà degli angoli interni dei triangoli ed alle loro relazioni con i lati.

La geometria delle linee è una geometria di precisione che, da un lato, richiede un'attenta misurazione degli angoli, dall'altro è fondata su un sapiente uso della proporzione. Questi elementi si trovano riassunti nel teorema sulla **proporzionalità dei lati dei triangoli equiangoli**, che è alla base dei calcoli tolemaici, ma che si può collocare anche all'origine delle funzioni trigonometriche (seno, coseno, tangente, che associano all'ampiezza di un angolo interno di un triangolo rettangolo il rapporto tra le lunghezze di due lati): la forma di una figura, in questo caso, interamente determinata dalla misura di un angolo, viene codificata, in maniera equivalente, tramite una relazione aritmetica tra misure di segmenti.

Questi elementi acquistano rilevanza nella tecnica del **disegno**, inteso come raffigurazione esteticamente apprezzabile (effetto ottenibile con l'applicazione di particolari **proporzioni** canoniche) ma anche come progetto di una costruzione o carta geografica (fedele **riproduzione in scala** di un oggetto reale). La geometria delle linee interviene in particolare laddove, superando l'ambito strettamente economico-amministrativo, si iniziano ad intraprendere attività artistiche ed architettoniche.

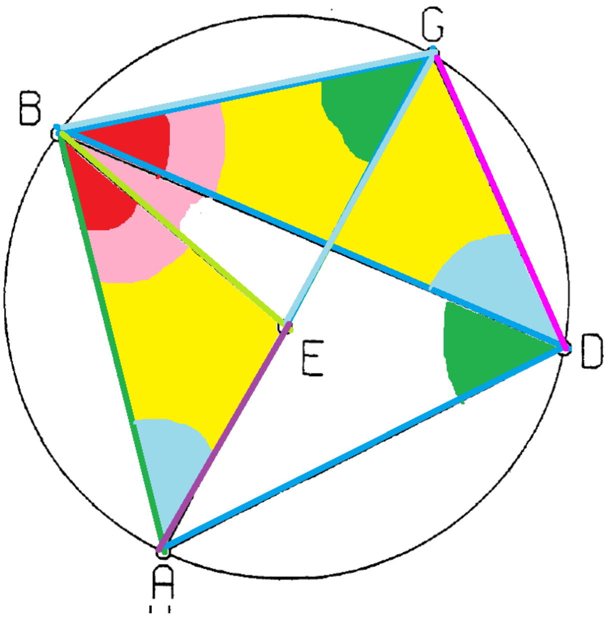


Ipotesi di suddivisione di un bassorilievo tardo-babilonese (X-VII secolo a.C.)

L'*Almagesto* ed il Teorema di Tolomeo

Nel seguito, riportiamo alcuni brani della traduzione in inglese dell'opera, effettuata da G. J. Toomer (1984).
Sono tratti dal Libro I, dedicato alle generalità di carattere astronomico ed ai fondamenti geometrici.

Theorem: Let there be a circle with an arbitrary quadrilateral ABGD inscribed in it. Join AG and BD.



We must prove that

AG.BD = AB.DG + AD.BG.

[Proof:] Make $\boxed{\angle ABE = \angle DBG.}$

Then, if we add ∠ EBD common,

$\boxed{\angle ABD = \angle EBG}$

But $\boxed{\angle BDA = \angle BGE}$ also, since they subtend the same segment. ←**BA**

∴ triangle ABD ||| triangle BGE. ←**proporzionalità dei lati di triangoli equiangoli**

∴ BG:GE = BD:DA.

∴ BG.AD = BD.GE.

Again, since $\boxed{\angle ABE = \angle DBG.}$

and $\boxed{\angle BAE = \angle BDG.}$ ←**BG**

triangle ABE ||| triangle BGD.

∴ BA:AE = BD:DG.

∴ BA.DG = BD.AE.

But it was shown that

BG.AD = BD.GE.

Therefore, by addition, AG.BD = AB.DG + AD.BG.

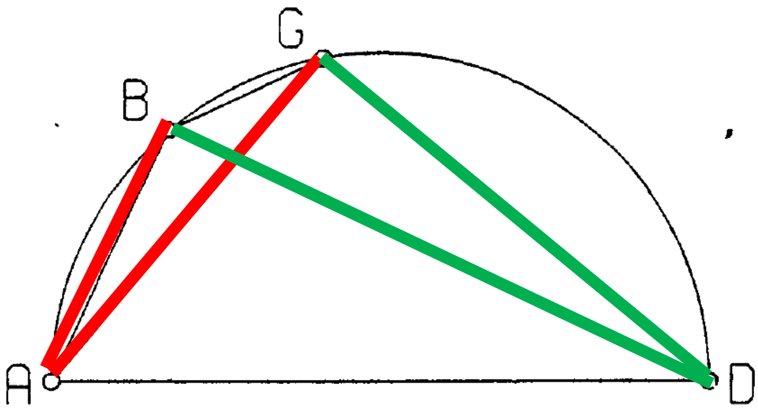
Q.E.D.

Al teorema principale sui quadrilateri ciclici segue una prima, importante applicazione, finalizzata alla compilazione di una tavola delle corde.

Having established this preliminary theorem, we draw the semi-circle ABGD on diameter AD, and draw from A two chords, AB, AG, each given in size in terms of a diameter of 120^p. Join BG.

I say that BG too is given.

[Proof:] Join BD,GD.



Then, clearly, BD and GD too will be given, since they are chords of [arcs] supplementary [to the arcs of the given chords AB and AG].

Teorema di Talete + Teorema di Pitagora

Now since ABGD is a cyclic quadrilateral,

$$AB.GD + AD.BG = AG.BD.$$

But AG.BD and AB.GD are given.

∴ AD.BG is given by subtraction.

And AD is a diameter.

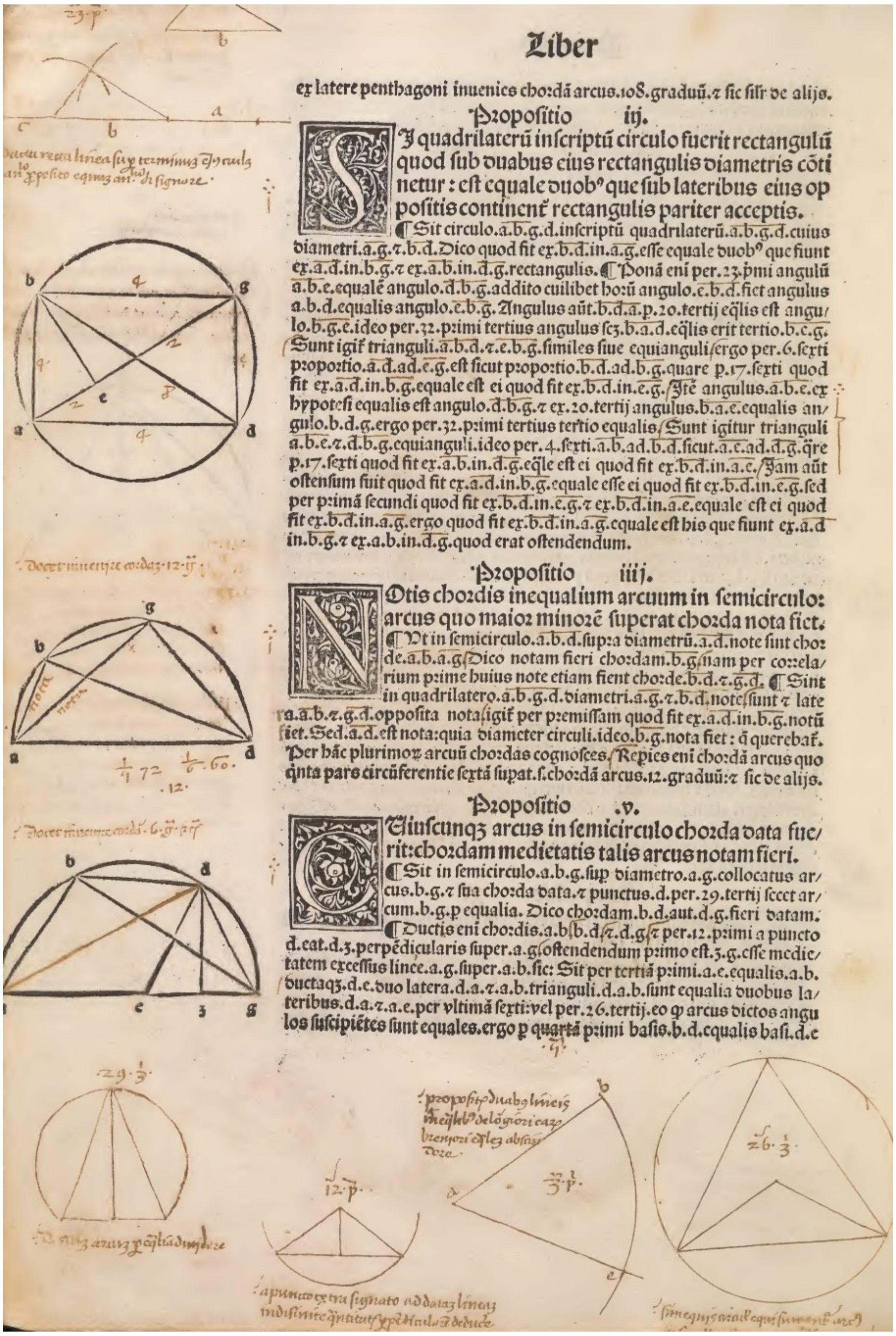
Therefore chord BG is given.

And we have shown that, if two arcs and the corresponding chords are given, the chord of the difference between the two arcs will also be given.

It is obvious that by means of this theorem we shall be able to enter [in the table] quite a few chords derived from the difference between the individually calculated chords, and notably the chord of 12°, since we have those of 60° and 72°.

L'osservazione finale riguarda note costruzioni (con riga e compasso), relative all'esagono e al pentagono regolari inscritti in una circonferenza, i cui angoli al centro hanno precisamente le ampiezze indicate.

Dall'epitome di Regiomontano



Liber

ex latere penthagoni inuenies chordā arcus.108.graduū.7 sic siſr de alijs.

Propositio iij.

Si quadrilaterū inscriptū circulo fuerit rectangulū quod sub duabus eius rectangulis diametris cōtinetur: est equale duob⁹ que sub lateribus eius oppositis continent rectangulis pariter acceptis.

¶ Sit circulo.a.b.g.d.inscriptū quadrilaterū.a.b.g.d.cuius diametri.a.g.7.b.d.Dico quod fit ex.b.d.in.a.g.esse equale duob⁹ que fiunt ex.a.d.in.b.g.7 ex.a.b.in.d.g.rectangulis. ¶ Ponā eni per.23.pmi angulū a.b.e.equalē angulo.d.b.g.addito cuilibet horū angulo.e.b.d.fiet angulus a.b.d.equalis angulo.e.b.g. Angulus aūt.b.d.a.p.20.tertij eq̄lis est angulo.b.g.e.ideo per.32.primi tertius angulus scz.b.a.d.eq̄lis erit tertio.b.e.g. Sunt igit trianguli.a.b.d.7.e.b.g.similes siue equianguli ergo per.6.sexti proportio.a.d.ad.e.g.est sicut proportio.b.d.ad.b.g.quare p.17.sexti quod fit ex.a.d.in.b.g.equale est ei quod fit ex.b.d.in.e.g. Itē angulus.a.b.e.ex hypotesi equalis est angulo.d.b.g.7 ex.20.tertij angulus.b.a.e.equalis angulo.b.d.g.ergo per.32.primi tertius tertio equalis Sunt igitur trianguli a.b.e.7.d.b.g.equianguli.ideo per.4.sexti.a.b.ad.b.d.sicut.a.e.ad.d.g.q̄re p.17.sexti quod fit ex.a.b.in.d.g.eq̄le est ei quod fit ex.b.d.in.a.e. Iam aūt ostensum fuit quod fit ex.a.d.in.b.g.equale esse ei quod fit ex.b.d.in.e.g.sed per primā secundi quod fit ex.b.d.in.e.g.7 ex.b.d.in.a.e.equale est ei quod fit ex.b.d.in.a.g.ergo quod fit ex.b.d.in.a.g.equale est his que fiunt ex.a.d in.b.g.7 ex.a.b.in.d.g.quod erat ostendendum.

Propositio iiij.

Notis chordis inequalium arcuum in semicirculo: arcus quo maior minorē superat chorda nota fiet.

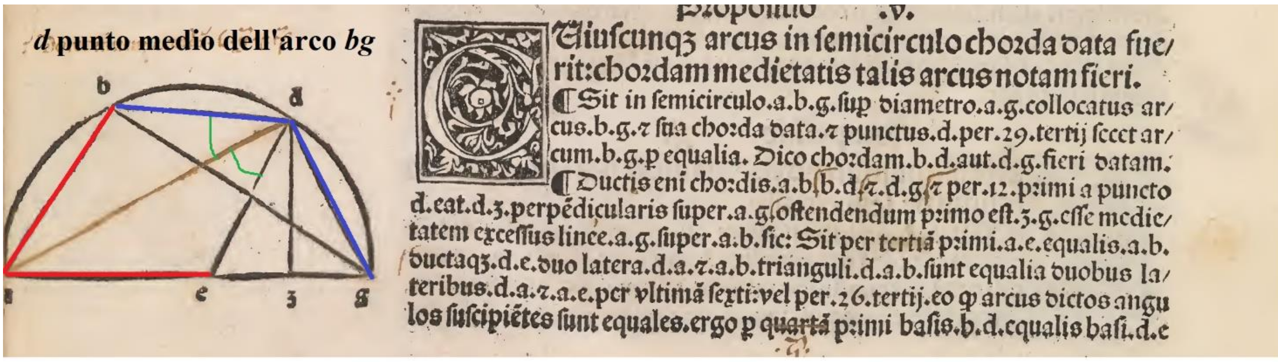
¶ Vt in semicirculo.a.b.d.supra diametrū.a.d.note sint chorde.a.b.a.g. Dico notam fieri chordam.b.g.nam per correlarium prime huius note etiam fient chorde.b.d.7.g.d. ¶ Sint in quadrilatero.a.b.g.d.diametri.a.g.7.b.d.note sunt 7 latera.a.b.7.g.d.opposita nota igit per premissam quod fit ex.a.d.in.b.g.notū fiet. Sed.a.d.est nota:quia diameter circuli.ideo.b.g.nota fiet: q̄ querebat. Per hāc plurimorum arcuū chordas cognosces. Repies eni chordā arcus quo q̄nta pars circūferentie sextā supat.s.chordā arcus.12.graduū:7 sic de alijs.

Propositio .v.

Cuiuscunqz arcus in semicirculo chorda data fuerit:chordam medietatis talis arcus notam fieri.

¶ Sit in semicirculo.a.b.g.sup diametro.a.g.collocatus arcus.b.g.7 sua chorda data.7 punctus.d.per.29.tertij secet arcum.b.g.p equalia. Dico chordam.b.d.aut.d.g.fieri datam. ¶ Ductis eni chordis.a.b.b.d.7.d.g.7 per.12.primi a puncto d.cat.d.z.perpēdicularis super.a.g.ostendendum primo est.z.g.esse medietatem excessus linee.a.g.super.a.b.sic: Sit per tertiā primi.a.e.equalis.a.b. ductaqz.d.e.duo latera.d.a.7.a.b.trianguli.d.a.b.sunt equalia duobus lateribus.d.a.7.a.e.per vltimā sexti:vel per.26.tertij.eo φ arcus dictos angulos suscipiētes sunt equales.ergo p quartā primi basis.b.d.equalis basi.d.e

Liber Primus, Propositio V **(epitome di Regiomontano all'*Almagesto*)**



L'enunciato afferma la costruibilità della corda sottesa ad un arco che sia la metà di un arco dato (*bg*). L'approccio è inizialmente *analitico*: si suppone dapprima dato il punto medio *d* dell'arco *bg*, e si osserva che allora le corde *bd* e *dg* rispondono al requisito. Quindi si cala da ***d*** la **perpendicolare** al diametro *ag*, e si chiama ***r*** il piede della perpendicolare. Si afferma quindi che *rg* è la metà dell'**eccesso** della lunghezza di *ag* rispetto ad *ab*. La parte successiva è dedicata alla dimostrazione di questa proprietà. Una volta che sarà stata provata, ne risulterà, per via *sintetica*, un procedimento di costruzione del punto *d,* ottenuto invertendo i passi del precedente ragionamento. Precisamente, si prescrive di

- riportare la lunghezza *ab* sul diametro *ag*, tracciando il secondo estremo *e*: in tal modo ***eg*** sarà l'**eccesso** di *ag* rispetto ad *ab*;
- determinare il punto medio ***r*** del segmento *eg*;
- condurre la **perpendicolare** ad *ag* dal punto *r*, determinando il punto ***d*** come intersezione tra questa e la semicirconferenza.

I passi della dimostrazione sono illustrati con i colori: i triangoli gialli sono uguali in quanto hanno uguali due lati (uno dei quali è in comune) ed un angolo (gli angoli indicati in verde sono angoli alla circonferenza che insistono su corde uguali). Ne consegue che hanno uguale anche il rimanente lato (in blu, *bd* = *de*). Il triangolo *dge* è quindi isoscele, essendo *d* il vertice comune ai due lati uguali. Quindi, calando da *d* la perpendicolare sul lato opposto, si traccia l'asse di quest'ultimo, ossia il piede *r* della perpendicolare è il suo punto medio.