L'aritmetica

Calcolo dei reciproci

Convenzione notazionale: Con la virgola e il punto e virgola si indicano i numeri in notazione sessagesimale (questi verranno qui anche evidenziati in rosso). Le sequenze di cifre consecutive si riferiscono invece alla notazione decimale. Ad esempio, 25 indica il numero venticinque, 2,5 il numero "due per sessanta più cinque", ossia "centoventicinque", 25,0 il numero "venticinque per sessanta", ossia "millecinquecento". Infine, 0;2,5 indicherà $\frac{2}{60}+\frac{5}{60^2}$.

Le divisioni venivano per lo più effettuate moltiplicando il dividendo per il reciproco del divisore. I Babilonesi disponevano di tavole di reciproci, ossia di valori di quozienti del tipo $\frac{1}{n}$, ove n è un intero compreso fra 2 e 59 e nella cui decomposizione in fattori primi non compaiono fattori diversi da 2, 3, e 5. Tali quozienti sono esattamente esprimibili nella notazione sessagesimale.

Utilizzando tali tavole, era possibile calcolare anche reciproci ivi non compresi, secondo il metodo seguente, scoperto nel 1947 da A. J. Sachs (e da lui chiamato la *tecnica*):

Sia $n = 60n_1 + n_2$. Si tratta di determinare, successivamente:

1.) $\frac{1}{n_2}$ (dalla tavola dei reciproci)

2.) $N = \frac{1}{n_2} n$ (numero il cui reciproco è noto)

3.) $\frac{1}{N}$

4.) $\frac{1}{n_2}\frac{1}{N} = \frac{1}{n_2}\frac{1}{\frac{1}{n_2}(60n_1+n_2)} = \frac{1}{n}$.

Esempio Determinare il reciproco di **2,5** $(2\cdot 60+5=125)$. Qui $n_1 = 2, n_2 = 5$.

1.) $\frac{1}{5} = \mathbf{0;12}$

2.) $N = \frac{1}{5}\cdot 125 = 25 = \mathbf{25}$

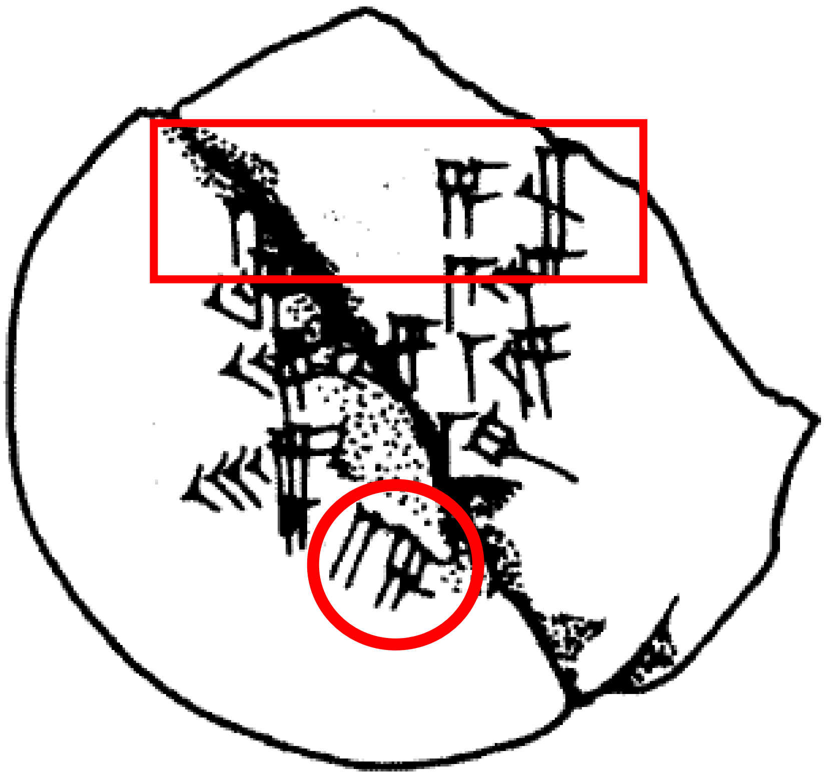
3.) $\frac{1}{25} = \mathbf{0;2,24}$ $(= \frac{2}{60}+\frac{24}{60^2})$

4.) $\mathbf{0;12\cdot 0;2,24} = \boxed{\mathbf{0;0,28,48}}$ $(= \frac{28}{60^2}+\frac{48}{60^3} = \frac{7}{30^2}+\frac{6}{30^3} = \frac{216}{30^3} = \frac{6^3}{30^3} = \frac{1}{5^3} = \frac{1}{125})$.

L'esempio è tratto dalla tavoletta UET 6/2 295; appartiene al materiale proveniente dagli scavi di Ur, frutto di una spedizione congiunta del *British Museum* e del museo dell'University of

Pennsylvania (Philadelphia). La sua trascrizione è stata pubblicata nel 1966. Qui troviamo, di seguito, il calcolo del reciproco di 0;0,28,48, effettuato a titolo di verifica (il risultato trovato è, naturalmente, il numero di partenza).

Nella riproduzione della tavoletta, il riquadro evidenzia il primo rigo, in cui si riconoscono di seguito i numeri 2, 5, 12. Il secondo e il terzo sono ravvicinati, per indicare che l'uno è il reciproco dell'altro. I numeri 2 e 5 ricompaiono in fondo, al termine del calcolo di verifica.



Nota: Una questione di interpretazione

Il metodo descritto da Sachs, evidentemente, presenta un notevole limite: può essere applicato solo quando n_2 è un divisore di n. Questa condizione non è necessariamente verificata, ad esempio, dal numero delle unità che compaiono nella scrittura del numero n nella base sessagesimale. In effetti, è stata successivamente proposta un'altra interpretazione del procedimento. La mettiamo a confronto con la precedente, qui di seguito riassunta.

<u>Interpretazione di Sachs (1947)</u>

$$n = a + b \to \frac{1}{a} \to \frac{1}{a}b \to \underbrace{1+\frac{1}{a}b}_{N} \to \frac{1}{1+\frac{1}{a}b} \to \frac{1}{a}\frac{1}{1+\frac{1}{a}b} = \frac{1}{n}$$

Così, ad esempio,

$n = 5,3,24,26,40 = \underbrace{5,3,24,20}_{b} + \underset{a}{6,40} \to \underset{\frac{1}{a}}{9} \to \underbrace{45,30,40}_{1+\frac{1}{a}b} \to$ si ricerca il reciproco ripetendo il procedimento.

Interpretazione di Proust (2013)

$n \to \underbrace{n\cdot\frac{1}{a}}_{N} \to$ si ricerca il reciproco del quoziente della divisione di n per a $\to$ si moltiplica il risultato per $\frac{1}{a}$.

Secondo Sachs, a è **addendo** di n, in una sua suddivisione come somma, secondo Proust, a è invece individuato come **divisore** di n. Per il numero N cambiano il significato aritmetico e il modo di determinarlo. Inoltre, secondo Proust, i Babilonesi sapevano che il reciproco del prodotto è il prodotto dei reciproci dei fattori.

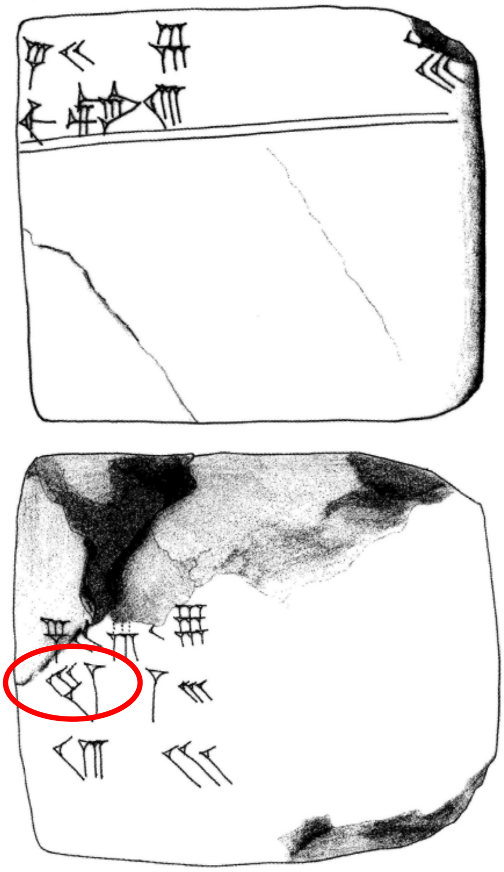
L'equivoco in cui è incorso Sachs sarebbe dovuto al testo della tavoletta VAT 6505, in cui il reciproco di 2,13,20 viene calcolato con il seguente procedimento:

- Calcola il reciproco di 3,20 $(=a)$ e trovi 18 $(=\frac{1}{a})$;
- Moltiplica 18 per 2,10 $(=b)$ e ottieni 39 $(=\frac{1}{a}b)$;
- **Aggiungi 1** e avrai 40 $(=1+\frac{1}{a}b)$;
- Calcola il reciproco di 40 e avrai 1,30 $(=\frac{1}{1+\frac{1}{a}b})$;
- Moltiplica 1,30 per 18 e avrai 27 $(=\frac{1}{a}\frac{1}{1+\frac{1}{a}b})$;
- 27 è il reciproco cercato

Secondo Proust, l'aggiunta dell'1 al terzo passo non andrebbe intesa come regola additiva generale, ma sarebbe dovuta al modo in cui viene effettuata la moltiplicazione di $n=a+b$ per $\frac{1}{a}$: si eseguono separatamente le moltiplicazioni sui due addendi (i prodotti, apparentemente, venivano spesso effettuati "a pezzi"), e uno dei due prodotti è, naturalmente, 1. Dopo di ciò, i due prodotti vengono sommati. Questa divisione a blocchi sarebbe una pratica diffusa, riscontrabile in altri documenti dell'epoca. D'altra parte, nella tavoletta di Nippur UM 29-15-192, è presente il calcolo di un reciproco che non fa alcun riferimento all'addizione, ossia alla preliminare decomposizione di N nella somma di a e b. Precisamente, vi si legge la seguente procedura (desumibile dalla sequenza dei dati numerici, indicati in grassetto):

4,26,40	(numero assegnato n)
9	(reciproco di 6,40, individuato come divisore a di n)
40	(prodotto di 4,26,40 e 9, il numero N)
1,30	(reciproco di N)
13,30	(prodotto di 9 e 1,30 reciproci di a e N)

Ora, osserva Proust, se l'autore della tavoletta avesse seguito la procedura indicata da Sachs, ad un certo punto avrebbe calcolato $\frac{1}{a}b$ (ossia 9 per 4,20), ottenendo, come risultato intermedio, 39, un numero che non compare. Ecco la versione originale della tavoletta:



Face

4:26:40
Son inverse 13:30

Revers

4:26:40 9
41[sic] 1:30
13:30

L’autore, al posto di 40, ha scritto 41. Questo dettaglio può sembrare sospetto: perché l’allievo scriba, che certamente ha eseguito la divisione indicata da Proust, ha ritenuto di riportare il risultato ottenuto (40) aumentato di una unità? Se si fosse trattato di un errore di calcolo nel quoziente (di per sé strano), l’allievo avrebbe cercato, nella tavola dei reciproci, il reciproco di 41 e non quello di 40. Una spiegazione plausibile è che la procedura fosse nota in entrambe le versioni (decomposizione in addendi e decomposizione in fattori) e che l’allievo si sia confuso, introducendo nella seconda (alla Proust) un passaggio “intruso”, proveniente dalla prima (alla Sachs).

<u>Osservazione finale</u>: Le sequenze di cifre sessagesimali indicate nelle tavolette non contengono informazioni sull'ordine di grandezza. Quindi gli effettivi valori numerici devono essere ricavati di volta in volta, in base al contesto, e dipenderanno dall'interpretazione del valore assegnato.

Ad esempio, nel primo calcolo, mantenendo fermo il valore assegnato per *n*, per 9 si deve intendere 0;09.

Nel secondo svolgimento i valori si possono leggere come segue:

2,13;20
3;20
0;18
2,10
39
40
0;1,30
0;0,27

E nel terzo:

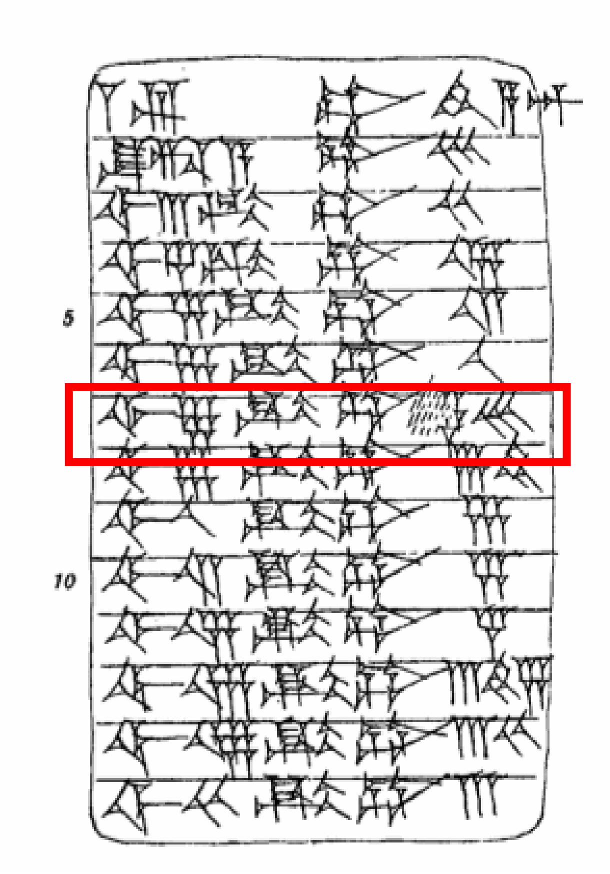
4,26,40
0;09
40
0;1,30
0;0,0,13,30

Diamo ora un'occhiata ad una tavola dei reciproci, nell'immagine originale (fronte e lato):

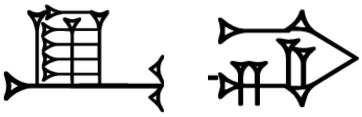

.

E retro:

Ecco la trascrizione di una tavola del tutto simile, in caratteri cuneiformi:



Escludendo le prime due righe, si può dire che i numeri si trovano sulla seconda e sull'ultima colonna. Gli altri caratteri formano parole. Nella colonna centrale si legge *gal.bi*, voce verbale indicante l'azione di *mettere in posizione*.



Nella prima colonna compare *igi*, che introduce il passaggio al reciproco (*igibum*). Il logogramma dell'occhio, oltre che alla vista, può infatti riferirsi anche al concetto di *parte* o *frazione*. Se posto davanti al numero 2, indicherà dunque la metà, di cui viene di seguito presentata la rappresentazione in base sessagesimale, scritta nell'ultima colonna. Ad esempio, consideriamo la riga evidenziata nel riquadro rosso. Questa si può leggere:

Il reciproco di 8 è 7 30.

In effetti, in base al calcolo che effettueremmo noi, nel nostro attuale linguaggio e sistema di numerazione:

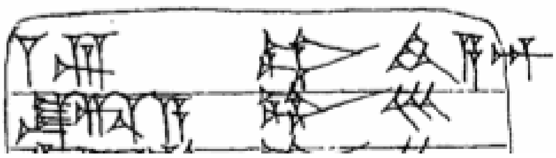
$$\frac{1}{8}=\frac{7}{60}+\frac{30}{60^2}\left(=\frac{7\cdot 60+30}{3600}=\frac{450}{3600}\right).$$

Da ciò ricaviamo l'esatta interpretazione di "7 30" che è, in base alla nostra convenzione notazionale, **0;7,30**.

L'interpretazione è analoga per un’altra riga, incisa sul retro. Qui il reciproco di "1 21", indicato come "44 26 40", corrisponde alla seguente uguaglianza:

$$\frac{1}{1\cdot 60+21}=\frac{1}{81}=\frac{44}{60^2}+\frac{26}{60^3}+\frac{40}{60^4}\left(=\frac{44\cdot 60^2+26\cdot 60+40}{12960000}=\frac{160000}{12960000}\right)$$

Infine, sveliamo il significato delle prime due righe:



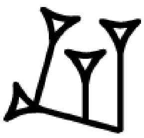
Di 1, *i suoi* 2/3, *sono* 40 $\left(\frac{2}{3}=\frac{40}{60}\right)$

La sua metà è 30 $\left(\frac{1}{2}=\frac{30}{60}\right)$

Più precisamente, la traslitterazione è

1 ŠANABI *bi* 40 A-AN (*am*)
ŠU-RI-A *bi* 30

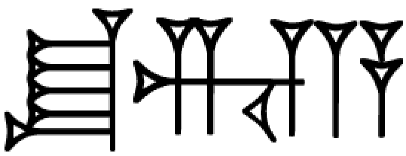
Nel testo compaiono due logogrammi sumerici, uno semplice, l’altro composto, ed entrambi riferiti a frazioni:

ŠANABI  (due terzi)[1]

derivato da

ŠUŠANA  (un terzo)[2]

e

 (la metà)
ŠU-RI-A

Quest’ultimo segno è composto, oltre che dalla desinenza *a*, dai logogrammi indicanti la mano (ŠU) e la rimozione (RI). Invece il logogramma A-AN si legge come *am,* ed è la copula (la particella *è*) che, nella lingua accadica, viene posta dopo la parte nominale.

[1] La corrispondente parola accadica è *šinipu*, termine derivato dall’espressione “due bocche”.
[2] In accadico, *šalšu*, da confrontare con *šalāš* (tre).

Altre tavolette aritmetiche

Altre tavolette babilonesi contengono:

- Calcoli di quadrati, cubi, potenze di ordine superiore, espressioni polinomiali
- Calcoli di "logaritmi"

Tavoletta MLC 2078

Tutte le righe (tranne la quinta, contenente un testo in buona parte indecifrabile) presentano la medesima struttura. La prima si legge:

e si può tradurre così:

0;15 rende 2 il lato.

Il significato aritmetico è $16^{0;15} = 2$, nel nostro linguaggio: 0;15 è il logaritmo in base 16 di 2. Al logaritmo in base 16 sono dedicate le prime quattro righe della tabella, le ultime 6 al logaritmo in base 2:

$$16^{0;15} = 2, \quad 16^{0;30} = 4, \quad 16^{0;45} = 8, \quad 16^{1} = 16,$$

$$2^1 = 2,\ 2^2 = 4,\ 2^3 = 8,\ 2^4 = 16,\ 2^5 = 32,\ 2^6 = 1,04,$$

Tuttavia, il riferimento al “lato (del quadrato)” fa ritenere che l’autore della tavoletta concepisse l’operazione più che altro come una sorta di estrazione di radice, nel senso seguente:

$$\sqrt[4]{16} = 2,\ \sqrt[2]{16} = 4,\ \sqrt[\frac{4}{3}]{16} = \left(\sqrt[4]{16}\right)^3 = 2^3 = 8.$$

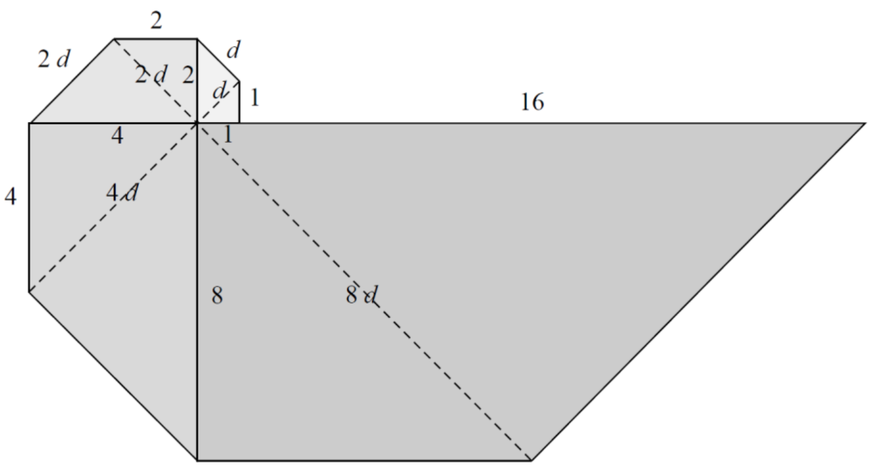
1 [1]**15-e** **2** **íb-si$_8$**
[2]**30-e** **4** **íb-si$_8$**
[3]**45-e** **8** **íb-si$_8$**
[4]**1-e** **16** **íb-si$_8$**
[5]***ga-mi-ru-um*** **níg (or: 4) *i du*(?) *uk* PI(?) . . . *ma*(?) . . . *i du*(?) *uk*(?)**

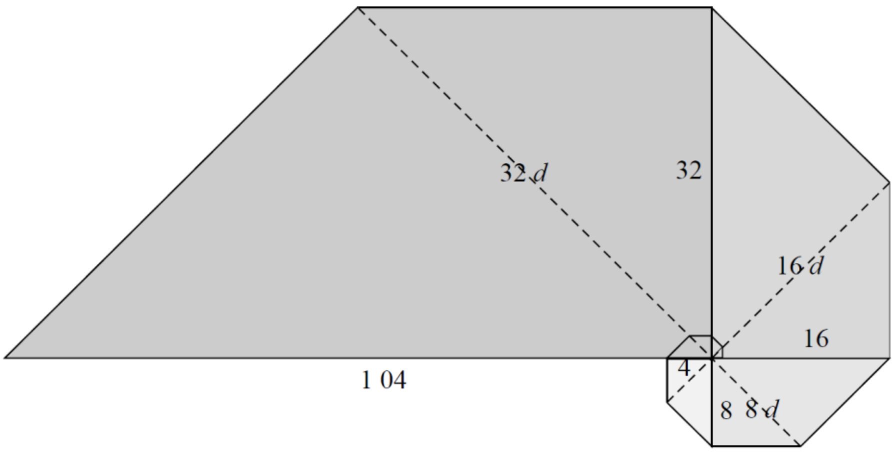
2 [6]**2-e** **1** **íb-si$_8$**
[7]**4-e** **2** **íb-si$_8$**
[8]**8-e** **3** **íb-si$_8$**
[9]**16-e** **4** **íb-si$_8$**
[10]**32-e** **5** **íb-si$_8$**
[11]**1,4-e** **6** **íb-si$_8$**

Left Edge: **1,16[96b]-e** **32** **íb-si$_8$**
1,30-e **1,4** **íb-si$_8$**

Una migliore giustificazione, di natura puramente geometrica, dell’uso del termine, ci proviene da Joran Friberg (2007). Secondo questo studioso, le due parti della tavoletta si riferirebbero ad un algoritmo di costruzione ricorsiva di triangoli rettangoli isosceli, percorso nei due sensi:

After ;15 = 1/4 turn of the spiral, the square side 2 is reached,
after ;30 = 1/2 turn of the spiral, the square side 4 is reached,
after ;45 = 3/4 turns of the spiral, the square side 8 is reached,
after 1 full turn of the spiral, the square side 16 is reached.

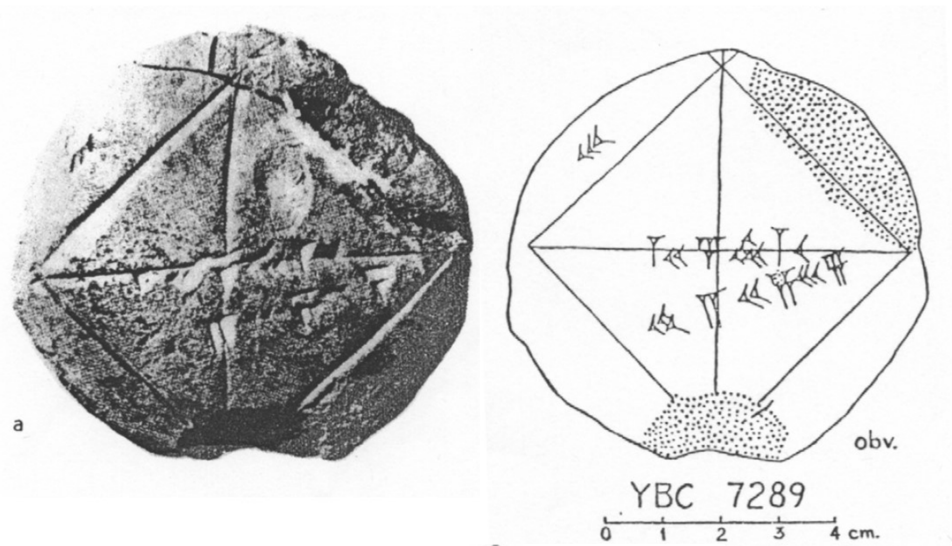


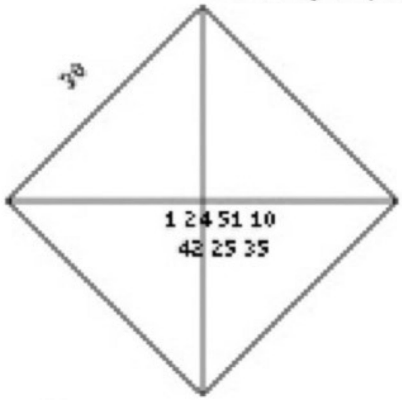


The square side 2 is reached after 1 quarter-turn,
the square side 4 is reached after 2 quarter-turns,
the square side 8 is reached after 3 quarter-turns,
the square side 16 is reached after 4 quarter-turns,
the square side 32 is reached after 5 quarter-turns,
the square side 1 04 (= 64) is reached after 6 quarter-turns.

Ulteriori argomenti aritmetici sono:

- Progressioni geometriche (somme dei primi termini, problemi di interesse composto)
- <u>Calcolo approssimato di radici quadrate</u>





L'immagine si riferisce al calcolo della lunghezza della diagonale (secondo numero riportato in orizzontale) di un quadrato di lato 30. Il primo numero riportato in orizzontale è un'approssimazione della radice quadrata di 2. Secondo B. van Waerden (1954), il valore ottenuto per $\sqrt{2}$, ossia 1;24,51,10, pari a

1,41421296...

che coincide con quello vero fino alla quinta cifra dopo la virgola (con un errore inferiore a 10^{-6}) sarebbe stato ottenuto con un algoritmo basato sulla seguente formula ricorsiva:

$$a_{i+1} = \frac{a_i + \frac{2}{a_i}}{2}$$

Ad ogni passo, la nuova approssimazione a_{i+1} è la media aritmetica dell'approssimazione precedente a_i e di $\frac{2}{a_i}$, l'una per difetto, l'altra per eccesso. Secondo J. Høyrup, sarebbe invece stata applicata la doppia ricorrenza (con dati iniziali $s_0 = d_0 = 1$)

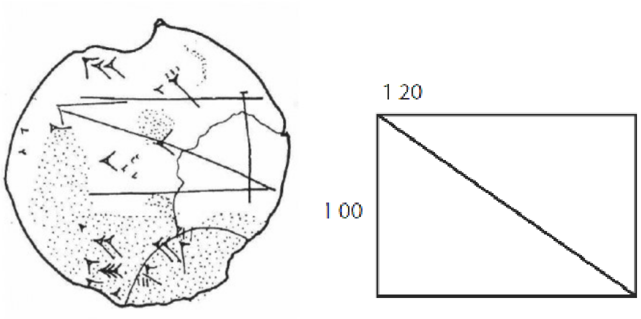
$$d_{n+1} = 2s_n + d_n, \quad s_{n+1} = s_n + d_n,$$

che fornisce una successione di approssimazioni $\frac{d_n}{s_n}$ per il rapporto tra diagonale e lato.

Si noti che il calcolo precedente presuppone, in ogni caso, la conoscenza del Teorema di Pitagora[3].

---

[3] Infatti, il retro della tavoletta presenta le tracce residue di un altro problema, che sembra riferito ad un triangolo rettangolo di lati 3, 4, 5.



Ulteriori osservazioni:

- La tavoletta è una di quelle usate dagli allievi scribi per esercitarsi. È possibile che i numeri chi vi compaiono siano i dati numerici di un semplice problema di calcolo, magari risolto attingendo il risultato da un lista di valori di riferimento.
- Nel caso in cui il simbolo numerico assegnato lungo il lato venisse interpretato come corrispondente a 0;30 (ossia, 0,5), i due numeri riportati sulla diagonale sarebbero uno il reciproco dell'altro (√2 e 1/√2).

Quello presentato non è l'unico metodo di approssimazione utilizzato per il calcolo della radice quadrata. Altrove, sempre in ambito geometrico, si procede secondo la formula

$$\sqrt{(a^2 + B)} \approx a + \frac{1}{2}\frac{B}{a}$$

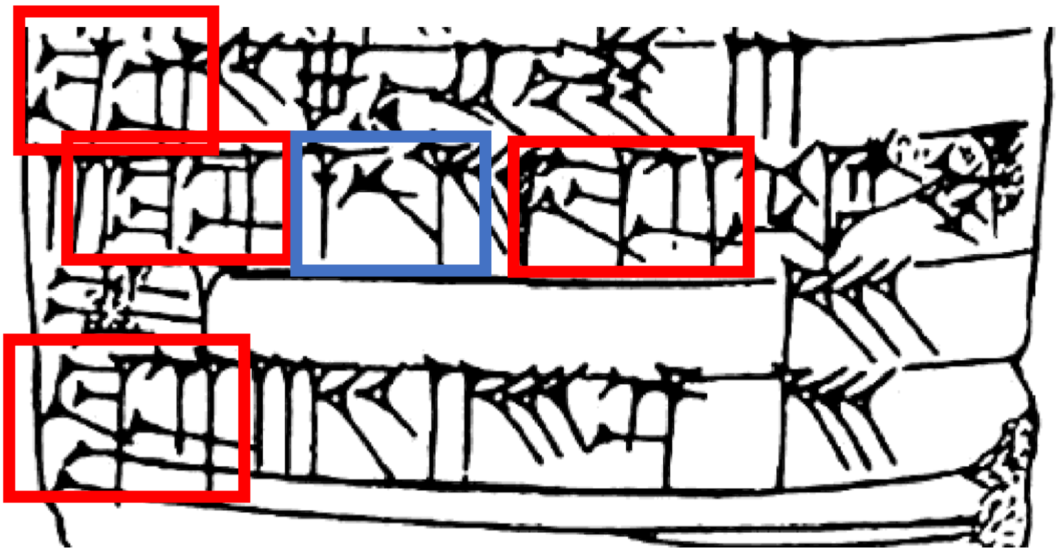
che è ragionevolmente applicabile nel caso in cui la misura *B* sia piccola rispetto alla lunghezza *a* (ad esempio, quando si tratti di calcolare la lunghezza della diagonale di un rettangolo la cui lunghezza prevalga nettamente sulla larghezza).

- Calcolo delle radici cubiche

I	$3;22,30 = a^3 \qquad 0;7,30$
II	$\sqrt[3]{0;07,30} = 0;30$
III	$(0;07,30)^{-1} = 8$
IV	$\frac{a^3}{0;07,30} = 8\,a^3 (= 27)$
V	$m = \sqrt[3]{\frac{a^3}{0;07,30}} (= 3)$
	$m \times 0;30 =$
VI	$\sqrt[3]{\frac{3;22,30}{0;07,30}} \times \sqrt[3]{0;07,30} =$
	$= \sqrt[3]{a^3} (= 1;30)$

Un esempio è fornito dalla tavoletta YBC 6295, in cui si applica il seguente metodo, espresso, per comodità, nel moderno simbolismo algebrico: per determinare la radice cubica di n, si forma il prodotto $\sqrt[3]{q} \cdot \sqrt[3]{\frac{n}{q}}$, ove q è un cubo perfetto minore di n. Nel caso considerato,
$n = 3;22,30 = (3,375 = 1,5^3)$,
$q = 0;07,30 (= 0,125 = 0,5^3)$,
così che $\frac{n}{q} = 27$. La trascrizione del contenuto della tavoletta nel moderno simbolismo algebrico è riportata qui a lato.

L'ultimo passo appare così nella tavoletta:



La trascrizione è:

ba-si 27 EN.NAM 3 3 ba-si a-na 30 ba-si ša-ni-im ÍL[4] 1 30 ba-si 3 22 30 1 30

La traduzione è:

Qual è la radice di 27? 3. Moltiplica 3, la radice, per 0;30, la seconda radice: 1;30. La radice di 3; 22,30: 1;30.

Si noti (in rosso) la ricorrenza del termine *basi* (lato) per indicare la radice. In blu il termine *a-na*, che indica la moltiplicazione.

---

[4] Sumerogramma indicante l'elevazione; qui esprime la moltiplicazione corrispondente all'accadico *ana*.