5 RELAZIONI D'ORDINE E D'EQUIVALENZA

Nella Sezione 1.2 abbiamo introdotto l'inclusione tra insiemi - indicata, ad esempio, dalla scrittura $X \subset Y$ - come una "relazione" tra gli insiemi X e Y. Il comune significato del termine "relazione" è "legame, rapporto", e, in effetti, due insiemi che sono uno contenuto nell'altro sono indiscutibilmente uniti da un particolare legame, che non intercorre necessariamente tra due insiemi scelti a caso. Allo stesso modo, la scrittura $x \leq y$, in cui x e y indicano numeri reali, esprime una precisa relazione tra numeri. Esiste, naturalmente, una certa somiglianza tra la relazione tra insiemi (denotata con $\subset$) e la relazione tra numeri (denotata con $\leq$). Entrambe affermano, in qualche modo, che il primo termine, X o x, non è maggiore del secondo, y o Y: esse esprimono dunque un confronto tra grandezze, e per questo meritano il nome di ***relazioni d'ordine***. Questo termine ha una precisa definizione matematica: per le esigenze di completezza formale che abbiamo evocato nella Sezione 1.1, tale definizione dovrà, però, essere preceduta dalla definizione di ***relazione.*** Questa non si potrà avvalere della concezione intuitiva che noi estrapoliamo dalla nostra esperienza quotidiana, ma dovrà essere formulata mediante nozioni matematiche note. In altri termini, l'idea intuitiva, che comunque rimane sullo sfondo del concetto, dovrà essere tradotta in un insieme di dati formali, che la rendano in un modo il più possibile fedele. Ora, il punto di partenza del discorso è, necessariamente, il contesto a cui la nozione va riferita. Nel nostro caso, la relazione è definita tra oggetti della stessa "natura" (insiemi, numeri), ossia appartenenti ad una stessa "collezione", che dobbiamo individuare preliminarmente. Possiamo pensare a $\leq$ come ad una relazione tra numeri interi ed a $\subset$ come ad una relazione tra i sottoinsiemi di un certo insieme E. In ogni caso, la relazione è definita su un determinato insieme: $\leq$ è una relazione su $\mathbf{Z}$, $\subset$ una relazione su $P(E)$. Il passo successivo è individuare i dati matematici che caratterizzano ognuna di queste relazioni. Conoscere la relazione $\leq$ di **Z** significa sapere esattamente per quali valori di $x,y\in\mathbf{Z}$ vale $x\leq y$; in altre parole, significa aver individuato tutte le ***coppie*** (x,y) di valori di **Z** tra cui sussiste la relazione voluta. Allora la relazione $\leq$ di **Z** è completamente descritta dall'insieme

$$R_{\leq} = \{(x,y) \mid x \in \mathbf{Z}, y \in \mathbf{Z} \text{ tali che } x \text{ è minore o uguale a } y\}$$

Questo può dunque essere formalmente assunto come la relazione $\leq$ di **Z**. Analogamente, l'insieme

$$R_{\subset} = \{(X,Y) \mid X \in \mathbf{P}(E), Y \in \mathbf{P}(E) \text{ tali che } X \text{ è contenuto in } Y\}$$

individua la relazione $\subset$ su $P(E)$. Ciò mostra che, in generale, una relazione su un insieme A può essere definita come un determinato insieme di coppie di elementi di A. L'insieme di *tutte* le coppie di elementi di A è

$$A \times A = \{(x,y) \mid x \in A, y \in A\}$$

Questo individua una particolarissima relazione, che potremmo chiamare "banale": in essa ogni elemento è in relazione con ogni altro elemento. In generale, invece, solo alcune coppie sono coinvolte. Quindi possiamo dare le seguente

Definizione 50 Dato un insieme non vuoto A, si dice RELAZIONE su A ogni sottoinsieme di $A\times A$ non vuoto.

Notazione Se una relazione è espressa dal simbolo "$\propto$", la indicheremo con la scrittura $R_\propto$, intendendo

$$R_\propto = \{(x,y) \in A \times A \mid x \propto y\}$$

Si avrà dunque che $(x,y)\in R_\propto \Leftrightarrow x \propto y$.

Terminologia La relazione introdotta dalla Definizione 50 è talvolta detta, per maggior precisione, *relazione binaria.* L'aggettivo evidenzia il fatto che la relazione è individuata da *coppie* di elementi. In certe situazioni, può essere utile definire anche relazioni tra *terne* di elementi, che vengono, naturalmente, dette *relazioni ternarie*, oppure relazioni tra *quaterne* di elementi, dette relazioni *quaternarie*, e così via.

Esempi 51

a) Si ha che $R_{\leq} \subset \mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$; $(1,2)\in R_{\leq}$, $(2,2)\in R_{\leq}$, $(1,0)\notin R_{\leq}$.

b) Dato l'insieme $A = \{0,1,2,3\}$,

$$R_{\Delta} = \{ (0,1), (1,0), (2,1)\} \subset A\times A$$

è una relazione su A. Essa è determinata unicamente da $0\Delta 1$, $1\Delta 0$, $2\Delta 1$. Si tratta, naturalmente, di una relazione di "fantasia", definita da noi, che rientra comunque pienamente nella Definizione 50. Quest'ultima ci concede la massima libertà nella scelta delle coppie che individuano la relazione. Ci è anche consentito, ad esempio, di non coinvolgere tutti gli elementi dell'insieme A: in effetti noi abbiamo scelto di non porre 3 in relazione con alcun elemento.

La relazione dell'Esempio 51b) è definita scegliendo le coppie "a caso" e non presenta particolari proprietà. È lecito invece aspettarsi che una relazione definita intrinsecamente da una regola, come $\leq$ e $\subset$, obbedisca a certi naturali criteri. Le espressioni "è maggiore o uguale a" e "è contenuto in" si possono tradurre entrambe in "non supera (in grandezza)". È chiaro che ogni elemento "non supera" se stesso; se due elementi "non si superano" reciprocamente, essi saranno uguali; se un primo elemento "non supera" un secondo, ed il secondo "non supera" un terzo, allora sicuramente il primo elemento "non supera" il terzo.
Queste tre proprietà sono formalizzate nella

Definizione 52 Una relazione $R_\propto$ sull'insieme A si dice RELAZIONE D'ORDINE se valgono le seguenti:

<u>Proprietà riflessiva:</u> $\forall a \in A \;\; a \propto a$

<u>Proprietà antisimmetrica:</u> $\forall a, b \in A \;\; a \propto b \wedge b \propto a \Rightarrow a = b$

<u>Proprietà transitiva:</u> $\forall a, b, c \in A \;\; a \propto b \wedge b \propto c \Rightarrow a \propto c$

Esempi 53

a) Riscriviamo le proprietà della Definizione 52 per la relazione $R_\leq$ di **Z**.

<u>Proprietà riflessiva:</u> $\forall x \in \mathbf{Z} \;\; x \leq x$

<u>Proprietà antisimmetrica:</u> $\forall x, y \in \mathbf{Z} \;\; x \leq y \wedge y \leq x \Rightarrow x = y$

<u>Proprietà transitiva:</u> $\forall x, y, z \in \mathbf{Z} \;\; x \leq y \wedge y \leq z \Rightarrow x \leq z$

b) La relazione R_Δ sull'insieme $A = \{0,1,2,3\}$ definita nell'Esempio 51b) non verifica nessuna delle tre proprietà. Ognuna è infatti confutata da un controesempio.

<u>Proprietà riflessiva:</u> non vale perché $(1,1) \notin R_\Delta$.

<u>Proprietà antisimmetrica:</u> non vale perché $(0,1) \in R_\Delta \wedge (1,0) \in R_\Delta$, però $0 \neq 1$.

<u>Proprietà transitiva:</u> non vale perché $(2,1) \in R_\Delta \wedge (1,0) \in R_\Delta$, però $(2,0) \notin R_\Delta$.

c) Naturalmente è sufficiente che una sola delle tre proprietà non sia verificata affinché la relazione considerata non sia una relazione d'ordine. Consideriamo la relazione di divisibilità, solitamente indicata dal simbolo $|$:

$$R_{|} = \{(x, y) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \mid x \text{ è un divisore di } y\}$$

Valgono la proprietà riflessiva (ogni numero è divisore di se stesso) e la proprietà transitiva (se un primo numero è divisore di un secondo numero, e questo è divisore di un terzo numero, il primo è divisore del terzo numero). Non vale, però, la proprietà antisimmetrica: 1 e -1 sono uno divisore dell'altro, ma sono distinti.
Per ripristinare la proprietà antisimmetrica si può sostituire **Z** con **N**, l'insieme dei numeri naturali: su **N** la relazione di divisibilità è una relazione d'ordine.

Nota Una relazione che verifica le proprietà riflessiva e transitiva (ma non necessariamente la proprietà antisimmetrica) si chiama una ***relazione di preordine***.

Osservazione 54 La proprietà antisimmetrica di una relazione $\propto$ sull'insieme A esprime il fatto che i termini in relazione non possono mai essere invertiti: se vale $a \propto b$, non vale $b \propto a$, tranne che nel caso banale in cui $a=b$. Se, invece, la relazione $\propto$ consente sempre l'inversione dei termini, si dice che essa verifica la

<u>Proprietà simmetrica:</u> $\forall a, b \in A \quad a \propto b \Rightarrow b \propto a$

Definizione 55 Una relazione $\propto$ sull'insieme A si dice una RELAZIONE D'EQUIVALENZA se verifica le proprietà riflessiva, simmetrica e transitiva.

Nota Due elementi legati da una relazione di equivalenza sono tali indipendentemente dall'ordine in cui li si considera. Diremo quindi semplicemente che essi sono *equivalenti*.

Esempi 56

a) L'uguaglianza è una relazione di equivalenza su ogni insieme.

b) In generale, è possibile definire una relazione di equivalenza su un insieme A mettendo in relazione le coppie di elementi che sono legati da una proprietà riconducibile, in qualche modo, ad un'identità, a qualcosa che i due oggetti hanno in comune. Ad esempio, sono relazioni di equivalenza su **Z**:

$$R_2 = \{(x, y) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \mid x^2 = y^2\}$$

$$R_{\text{div}} = \{(x, y) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \mid x \text{ e } y \text{ hanno gli stessi divisori primi}\}$$

Definizione 57 Data una relazione di equivalenza $R_\approx$ sull'insieme A, per ogni $a \in A$, l'insieme

$$R_\approx(a) = \{b \in A \mid a \approx b\}$$

è detto CLASSE DI EQUIVALENZA di a.

Osservazione 58 Ogni classe di equivalenza raggruppa quindi tutti gli elementi che sono reciprocamente equivalenti. Infatti, come conseguenza della proprietà transitiva, poiché tutti gli elementi di $R_\approx(a)$ sono equivalenti ad a, essi saranno anche equivalenti tra loro. Inoltre, ogni elemento equivalente ad un elemento di $R_\approx(a)$, è, per transitività, equivalente ad a, e quindi appartiene a $R_\approx(a)$.

Esempi 59
Determiniamo le classi di equivalenza delle relazioni degli Esempi 56.

a) Le classi di equivalenza dell'uguaglianza sono tutte ridotte ad un solo elemento. In ogni insieme A, e per ogni $a \in A$, $R_=(a) = \{a\}$.

b) Per ogni $x \in \mathbf{Z}$,

- $R_2(x)$ = $\{x,-x\}$; questo insieme ha sempre due elementi, tranne quando x=0, infatti $R_2(0) = \{0\}$;

- $R_{\text{div}}(0)$ = $\{0\}$: infatti 0 è l'unico numero intero divisibile per tutti i numeri primi;
  $R_{\text{div}}(1) = \{1, -1\} = R_{\text{div}}(-1)$: infatti 1 e -1 sono gli unici numeri interi privi di divisori primi;
  $R_{\text{div}}(2) = \{ 2^n , -2^n \mid n\in\mathbf{N}^*\} = \{2,-2,4,-4,8,-8,\ldots\}$;
  $R_{\text{div}}(6) = \{ 2^n3^m, -2^n3^m \mid n,m\in\mathbf{N}^*\} = \{6,-6,12,-12,18,-18,24,-24\ldots\}$;
  In generale, per ogni altro $x\in\mathbf{Z}$, se
  $x = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_s^{\alpha_s}$ è la decomposizione in fattori primi di x, allora

$$R_{\text{div}}(x) = \{p_1^{n_1} p_2^{n_2} \cdots p_s^{n_s} \mid n_1, n_2, \ldots, n_s \in \mathbf{N}^*\}$$

Osservazione 60
Le classi di equivalenza operano, sull'insieme *A*, una sorta di "classificazione". Per illustrare il concetto, possiamo considerare l'esempio della relazione di consaguineità, che è una relazione di equivalenza sull'insieme degli uomini viventi sulla Terra. Ogni classe di consanguineità raccoglie tutti gli individui che sono tra loro consanguinei. Nessuna persona può appartenere a due classi di consaguineità distinte, perché, altrimenti, gli uomini delle due classi sarebbero consanguinei tra loro, e formerebbero dunque un'unica classe. Inoltre ogni uomo appartiene ad almeno una classe di consanguineità: se anche fosse privo di parenti in vita, sarebbe comunque consanguineo a se stesso, per la proprietà riflessiva. La consanguineità fornisce una "classificazione" della popolazione mondiale poiché la suddivide in gruppi in modo tale che ogni uomo sia collocato in *uno* ed *uno solo* di essi.

In termini insiemistici astratti, si ha dunque la seguente

Proprietà 61

Le classi di equivalenza $R_{\approx}(a)$ sono sottoinsiemi di A tali che:
- la loro unione è A (ogni elemento appartiene ad *almeno una* classe di equivalenza)
- classi di equivalenza distinte sono disgiunte (ogni elemento appartiene ad *una sola* classe di equivalenza).

Ciò si esprime dicendo che le classi di equivalenza formano una ***partizione*** di A.

Nota In questa sezione abbiamo considerato coppie di elementi appartenenti allo stesso insieme. Nulla vieta, più in generale, di considerare coppie in cui il primo elemento appartiene ad un insieme X, ed il secondo ad un insieme Y. Si dà la seguente

Definizione 62 Dati due insiemi non vuoti X, Y, si definisce il PRODOTTO CARTESIANO di X e Y come l'insieme

$$X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X, y \in Y\}.$$