Algebra n. 3 - NOTE ALLA LEZIONE 25

Esempio 25.1

Un elemento a di $\mathbb{Z}[i]$ è irriducibile se la sua norma è un numero intero irriducibile. Infatti in tal caso, poiché la sua norma è maggiore di 1, l'elemento a non è invertibile, né nullo. Inoltre, se $b, c \in \mathbb{Z}[i]$ sono tali che $a = bc$, allora, essendo $N(a) = N(b)N(c)$, ed $N(a)$ irriducibile, uno dei numeri interi positivi $N(b)$ ed $N(c)$ è necessariamente uguale a 1. Ma in tal caso uno tra b e c è invertibile. Ciò prova che a è irriducibile in $\mathbb{Z}[i]$ se lo è $N(a)$ in $\mathbb{Z}$.

Esempio 25.2

I numeri x e y sono coprimi, in quanto, se avessero in comune un fattore primo p, allora p^2 dividerebbe $x^3 - y^2 = 5$, impossibile.

Essendo x dispari, gli ideali (x) e (2) sono coprimi. Infatti, in generale, se a, b sono numeri interi coprimi, per il Lemma di Bézout, esiste una combinazione lineare intera di a e b uguale a 1, e dunque $(a) + (b) = \mathbb{Z}[i\sqrt{5}]$.
Poiché P divide (x), non può allora dividere (2), poiché altrimenti, dividendo entrambi (x) e (2), ne dividerebbe (ossia conterrebbe) la somma, impossibile, dato che P è un ideale proprio.
D'altra parte, P divide (contiene) il prodotto $(2)(y)$ e quindi, essendo un ideale primo, per la Proposizione 21.1 b), deve contenere (dividere) uno dei due fattori. Per esclusione, questo è necessariamente (y).

<u>Nota</u>: Una volta acquisita la caratterizzazione degli ideali coprimi di un dominio di Dedekind come quelli che non possiedono fattori primi in comune (v. *Supplemento*), si può applicare un ragionamento che risulta perfettamente modellato sull'aritmetica degli UFD. Si può infatti osservare, anzitutto, che se P divide (x), e dunque è un suo fattore primo, non può essere un fattore primo di (2), dato che (2) è coprimo rispetto a (x). Dopo di ciò, constatando che P è un fattore primo del prodotto $(2)(y)$, si deduce che P deve comparire nella fattorizzazione di uno dei due ideali. Essendo escluso (2), si conclude che P è allora un fattore primo di (y).