Algebra n. 3 - NOTE ALLA LEZIONE 24

Esercizio 24.6

a) Se esiste un intero k tale che $(2k+1)\sqrt{2}\in I,$ allora, dato che $2\in I,$ e dunque $2k\sqrt{2}\in I,$ segue che $\sqrt{2}\in I.$

Esercizio 24.7

Per determinare la fattorizzazione dell'ideale (5) in $\mathbb{Z}[i\sqrt{5}]$ secondo il criterio di Kummer, si considera la fattorizzazione in $\mathbb{Z}_5[x]$ della riduzione modulo 5 di $f(x)=x^2+5,$ che è $\overline{f}(x)=x^2,$ prodotto di due fattori monici irriducibili uguali alla riduzione modulo 5 del polinomio $f_1(x)=x.$ Dunque la fattorizzazione dell'ideale (5) si compone di due fattori uguali all'ideale primo $P_5=(5,f_1(i\sqrt{5}))=(5,i\sqrt{5})=(i\sqrt{5}).$
Analogamente si procede per l'ideale (7). La riduzione modulo 7 di $f(x)$, che è $\overline{f}(x)=x^2-\overline{2},$ possiede in $\mathbb{Z}_7$ le radici $\overline{3}$ e $-\overline{3}$, e dunque si decompone nel prodotto delle riduzioni modulo 7 dei polinomi $f_1(x)=x-3, f_2(x)=x+3.$ Da questi si derivano gli ideali primi $P_6=(7,3+i\sqrt{5}), P_7=(7,-3+i\sqrt{5}).$

Dopo aver osservato che $P_1=(2,3+i\sqrt{5}),$ si constata immediatamente che $(3+i\sqrt{5})\subset P_1\cap P_6.$ Alla luce del Corollario 23.19, per concludere basterà provare che i due ideali hanno la stessa norma. Ora, dal fatto che $2\in P_1$ e $7\in P_6$ segue che gli ideali P_1 e P_6 sono coprimi, così che $P_1\cap P_6=P_1P_6.$ Inoltre, $N(P_1)=2, N(P_6)=7.$ La prima uguaglianza è stata stabilita nell'Esempio 23.21, per stabilire la seconda uguaglianza si può applicare il metodo indicato nell'Esempio 23.25. Quindi $N(P_1P_6)=14=3^2+5=N(3+i\sqrt{5})=N((3+i\sqrt{5})),$ come volevasi.