Esercizio

Nell'anello $A = \mathbb{Z}\left[i\sqrt{5}\right]$ si consideri l'ideale $P_1 = (2, 1 + i\sqrt{5})$. Determinare P_1^{-1}.

Svolgimento

In base alla Proposizione 21.8, essendo P_1 un ideale primo, il suo inverso si può determinare come l'insieme

$$J = A : I = \left\{x \in \mathbb{Q}\left(i\sqrt{5}\right) \mid xP_1 \subset A\right\}.$$

Sia ora $\alpha \in J,\ \alpha = \frac{r}{s} + \frac{u}{v} i\sqrt{5}$, ove $r, u \in \mathbb{Z},\ s, v \in \mathbb{N}^*,$ e $\mathrm{MCD}(r, s) = \mathrm{MCD}(u, v) = 1$. Allora

i) $2\alpha \in A,$ e dunque $s, v \in \{1, 2\}$. Possiamo quindi scrivere $\alpha = \frac{a}{2} + \frac{b}{2} i\sqrt{5}$ per opportuni $a, b \in \mathbb{Z}$.

ii) Inoltre $\left(1 + i\sqrt{5}\right)\alpha \in A$, ossia:

- $\dfrac{a - 5b}{2} \in \mathbb{Z},$
- $\dfrac{a + b}{2} \in \mathbb{Z}.$

La condizione ii) vale se e solo se $a \equiv b \pmod 2$. Ne consegue che

$$P_1^{-1} = \left\{\frac{a + bi\sqrt{5}}{2} \mid a, b \in \mathbb{Z},\ a \equiv b \pmod 2\right\}.$$

Svolgimento alternativo

Sapendo che $P_1^2 = (2)$, si deduce che

$$P_1^{-1} = (2)^{-1}P_1 = \left(\frac{1}{2}\right)P_1 = \left(\frac{1}{2}\right)\left((2) + \left(1 + i\sqrt{5}\right)\right) = \left(1,\ \frac{1 + i\sqrt{5}}{2}\right) = A + \left(\frac{1 + i\sqrt{5}}{2}\right).$$

Si può verificare che questo ideale frazionario coincide con J. Infatti, da un lato è evidente che $1,\ \dfrac{1 + i\sqrt{5}}{2} \in J$. Dall'altro lato, per ogni $h, k \in \mathbb{Z}$,

$$\frac{2h + 2ki\sqrt{5}}{2} = h + ki\sqrt{5} \in A,$$

$$\frac{2h + 1 + (2k+1)i\sqrt{5}}{2} = h + ki\sqrt{5} + \frac{1 + i\sqrt{5}}{2}.$$