Algebra n. 3 - NOTE ALLA LEZIONE 21

Premesse alla **Proposizione 21.1**:

Le nozioni preliminari sugli ideali sono contenute nelle dispense di Algebra Commutativa (Lezione 1).

Ad ulteriore commento si può aggiungere un'osservazione sull'origine dell'enunciato. La definizione di *ideali coprimi* trae ispirazione dal caso di un PID. Detto A un dominio ad ideali principali, e considerati due suoi ideali I e J, esistono due elementi a e b di A tali che $I=(a), J=(b)$. Allora $I+J=(d)$, ove d è un massimo comune divisore di a e b. Pertanto si ha $I+J=A$ se e solo d è invertibile, ossia se e solo se gli elementi a e b sono coprimi. Inoltre $I\cap J=(h)$, per ogni minimo comune multiplo h di a e b. Dunque $IJ=I\cap J$ se e solo se ab è un minimo comune multiplo di a e b, il che avviene se e solo se a e b sono coprimi. Riassumendo, per ogni coppia di ideali I e J di un PID vale quanto segue: $IJ=I\cap J$ se e solo se I e J sono ideali coprimi. In un anello commutativo unitario, secondo quanto affermato dalla Proposizione 21.1, vale il "se".
Non vale, in generale, il "solo se", nemmeno nei domini a fattorizzazione unica. Ad esempio, nell'UFD $K[x,y]$, anello di polinomi nelle indeterminate x,y a coefficienti nel campo K, si ha che $(x)(y)=(x)\cap(y)$, in quanto entrambi gli ideali sono uguali a (xy), ma gli ideali (x) e (y) non sono coprimi, dato che $(x)+(y)=(x,y)\neq K[x,y]$.

Per l'esistenza di massimo comune divisore e minimo comune multiplo di due elementi di un PID si può consultare il testo di P. A. Grillet (*Abstract Algebra,* p. 135).
Per avere un esempio su cui fissare le idee, si può considerare l'anello $\mathbb{Z}$, insieme agli ideali coprimi $I=2\mathbb{Z}, J=3\mathbb{Z}$ (per cui $I+J=\mathbb{Z}, I\cap J=6\mathbb{Z}=IJ$), il cui caso può essere confrontato con quello degli ideali non coprimi $I=4\mathbb{Z}, J=6\mathbb{Z}$ (per cui $I+J=2\mathbb{Z}, I\cap J=12\mathbb{Z}, IJ=24\mathbb{Z}$).

Dimostrazione della **Proposizione 21.1**:

Si ha:

$$A=AA=(I_p+I_{r-1})(I_p+I_r)=I_p(I_p+I_r+I_{r-1})+I_{r-1}I_r,$$

ove la terza uguaglianza segue dalla proprietà distributiva del prodotto rispetto alla somma di ideali. Si osservi quindi che il primo addendo dell'ultima somma, in quanto prodotto, è contenuto nel primo fattore, I_p. Pertanto la somma è contenuta in $I_p+I_{r-1}I_r$.

Osservazione 21.4

Se I è un ideale frazionario, è un sotto-A-modulo di K, e dunque tale è anche aI, per ogni $a\in A$. Nel caso in cui si abbia $aI\subset A$, ne consegue che aI è un sotto-A-modulo di A, ossia un suo ideale.

Dimostrazione del **Lemma 21.6** c):

Per ogni $x \in I, y \in J$, $(ax)(by) = ab(xy) \in ab(IJ)$ e da ciò si deduce che $(aI)(bJ) \subset ab(IJ)$. Viceversa, dati $x_1, ..., x_n \in I, y_1, ..., y_n \in J$, si ha $ab\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \sum_{i=1}^{n} (ax_i)(by_i) \in (aI)(bJ)$, e quindi $ab(IJ) \subset (aI)(bJ)$.

Si può anche osservare che, per ogni $a \in A$, ed ogni ideale I di A, si ha $aI = (a)I$, e dunque l'uguaglianza $(aI)(bJ) = ab(IJ)$, letta nella forma $((a)I)((b)J) = (a)(b)(IJ)$, segue dalla commutatività e dall'associatività del prodotto di ideali (proprietà facilmente dimostrabili sulla base della definizione stessa di prodotto).