Algebra n. 3 - NOTE ALLA LEZIONE 7

Dimostrazione del **Teorema 7.5**:

Struttura del ragionamento induttivo:

Si ragiona per induzione su n, e, per ogni valore di n fissato, si effettua l'induzione su d.

Sia $p(x_1,\dots,x_n)$ di grado 1. Allora $p(x_1,\dots,x_n)=\sum_{i=1}^{n} a_i x_i + b.$ Ora, se il polinomio è simmetrico, per ogni coppia di indici (i,j) distinti deve rimanere invariato quando le indeterminate x_i e x_j vengono scambiate, e dunque deve risultare $a_i = a_j$. Pertanto tutti i coefficienti a_i sono uguali ad un certo elemento a di K. Mettendolo in evidenza, e ricordando che $s_1^{(n)} = \sum_{i=1}^{n} x_i$, si ottiene per $p(x_1,\dots,x_n)$ la forma voluta.

Sia $\sigma \in S_{n-1}$, e sia $\overline{\sigma} \in S_n$ tale che $\sigma(i) = \overline{\sigma}(i)$ per ogni $i \in \{1,\dots,n-1\}$, $\overline{\sigma}(n) = n.$ Allora

$$\sigma \overset{\circ}{q} = \overset{\circ}{q}(x_{\sigma(1)},\dots,x_{\sigma(n-1)}) = q(x_{\sigma(1)},\dots,x_{\sigma(n-1)},0) = q(x_{\overline{\sigma}(1)},\dots,x_{\overline{\sigma}(n-1)},x_n)\Big|_{x_n=0} = \overline{\sigma} q\Big|_{x_n=0} = q\Big|_{x_n=0} = \overset{\circ}{q}$$

Si ha:

$$s_k^{(n)} = \sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le n} x_{i_1}\cdots x_{i_k} = \sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le n-1} x_{i_1}\cdots x_{i_k} + \sum_{1\le i_1<\cdots<i_{k-1}\le n-1} x_{i_1}\cdots x_{i_{k-1}} x_n.$$

Dunque

$$\overset{\circ}{s}{}_k^{(n)} = s_k^{(n)}\Big|_{x_n=0} = \sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le n-1} x_{i_1}\cdots x_{i_k} = s_k^{(n-1)}$$

Comunque dati $f(x_1,...,x_n), g(x_1,...,x_n) \in K[x_1,...,x_n]$, si vuole provare che

$$f(s_1^{(n)},...,s_n^{(n)}) = g(s_1^{(n)},...,s_n^{(n)}) \quad \text{se e solo se} \quad f(x_1,...,x_n) = g(x_1,...,x_n),$$

ossia

$$(f-g)(s_1^{(n)},...,s_n^{(n)}) = 0 \quad \text{se e solo se} \quad (f-g)(x_1,...,x_n) = 0.$$

Proposizione 7.11

Per il Teorema di Ruffini

$$p(x) = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_n).$$

Sviluppando il prodotto, si ottiene la somma di tutti prodotti ricavati selezionando, in ogni parentesi, uno dei due addendi. Per determinare il coefficiente del termine x^i si tenga conto che:

- tale potenza compare tutte e sole le volte che, in esattamente i delle parentesi della decomposizione suindicata, viene selezionato il termine x, e nelle restanti $n-i$ il termine $-\alpha_j$;
- in ognuno di tali prodotti, x^i risulta quindi moltiplicato per $(-1)^{n-i}$ per un prodotto di $n-i$ termini α_j;
- i prodotti siffatti sono, a meno del fattore $(-1)^{n-i}$, tutti e soli i prodotti ottenuti prendendo i termini α_j a gruppi di $n-i$;
- la somma di tali prodotti è, pertanto, $s_{n-i}^{(n)}(\alpha_1,...,\alpha_n)$.

Corollario 7.12

Sia $F(x_1,...,x_n)$ una funzione polinomiale a coefficienti in K e simmetrica. Allora, per il **Teorema 7.5**, esiste un polinomio $G(x_1,...,x_n)$ a coefficienti in K tale che

$$F(x_1,...,x_n) = G(s_1^{(n)}(x_1,...,x_n),...,s_n^{(n)}(x_1,...,x_n)).$$

Con la notazione dell'enunciato di questo corollario si ha allora:

$$F(\alpha_1,...,\alpha_n) = G(s_1^{(n)}(\alpha_1,...,\alpha_n),...,s_n^{(n)}(\alpha_1,...,\alpha_n)) = G(-a_{n-1},...,(-1)^n a_0).$$