Algebra n. 3 - NOTE ALLA LEZIONE 4

Proposizione 4.1

Un omomorfismo di campi, essendo un omomorfismo di anelli (unitari) conserva somme e prodotti. Se lascia fissi gli elementi di F, conserverà dunque le combinazioni lineari a coefficienti in F, ossia sarà un'applicazione F-lineare. Viceversa, se un omomorfismo tra i campi K e L contenenti F come sottocampo è un'applicazione F-lineare, allora, per ogni $\lambda \in F$, $\lambda = \lambda 1_K$ viene inviato in $\lambda 1_L = \lambda$. Ciò prova che ogni elemento di F viene lasciato fisso.

<u>Dimostrazione</u> della Proposizione **4.1**

Ricordiamo che

- $(\varphi_\alpha^*)^{-1} : F(\alpha) \to F[x]/(p(x))$ è tale che, per ogni $f(x) \in F[x]$, $f(\alpha) \mapsto f(x) + (p(x))$;
- $\varphi_\beta^* : F[x]/(p(x)) \to F(\beta)$ è tale che, per ogni $f(x) \in F[x]$, $f(x) + (p(x)) \mapsto f(\beta)$.

L'applicazione $\varphi : F(\alpha) \to F[x]/(p(x)) \to F(\beta)$ è tale che

- per ogni $\lambda \in F$, $\lambda \mapsto \lambda + (p(x)) \mapsto \lambda$
- $\alpha \mapsto x + (p(x)) \mapsto \beta$

Pertanto soddisfa l'ultima condizione richiesta dall'enunciato.

Lemma 4.3

La situazione descritta nell'enunciato può essere illustrata con i seguenti diagrammi commutativi, nei quali le frecce verticali indicano le inclusioni insiemistiche:

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d] & \widetilde{F} \arrow[d] \\ F(\alpha) \arrow[r, dashed, "\varphi"] \arrow[d, "\alpha \mapsto \widetilde{\alpha}"'] & \widetilde{F}(\widetilde{\alpha}) \arrow[d] \\ K & \widetilde{K} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} F \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d] & \widetilde{F} \arrow[d] \\ F[x] \arrow[r, "\overline{\sigma}"] & \widetilde{F}[x] \\ p(x) \mapsto \widetilde{p}(x) \end{tikzcd}$$

<u>Dimostrazione</u> del **Lemma 4.3**

Il campo F è sottocampo del campo $F[x]/(p(x))$ mediante il monomorfismo definito da $\lambda \mapsto \lambda + (p(x))$. I polinomi costanti appartengono, evidentemente, a classi laterali modulo $(p(x))$ a due a due distinte. L'applicazione $\widehat{\sigma}$ è definita da $f(x) + (p(x)) \mapsto \overline{\sigma}(f(x)) + \left(\widetilde{p}(x)\right)$. Quindi, per ogni polinomio costante $\lambda \in F$, effettua la seguente assegnazione:

$$\lambda + (p(x)) \mapsto \sigma(\lambda) + \left(\widetilde{p}(x)\right)$$

Pertanto, alla luce della identificazione indicata sopra, sui polinomi costanti di F l'applicazione $\widehat{\sigma}$ opera come σ.

L'isomorfismo cercato, costruito alla fine della dimostrazione, si riduce a quello della dimostrazione precedente quando $F = \widetilde{F}$ e $\sigma = id_F$.

Osservazione 4.9

Supponiamo che K e $\widetilde{K}$ siano estensioni di un campo F, e $\varphi : K \to \widetilde{K}$ sia un $F-$omomorfismo di campi. Questo è necessariamente un monomorfismo (perché omomorfismo di anelli unitari, quindi non banale, e dunque avente nucleo banale: il nucleo è un ideale di K, ma K ha come ideali solo (0) e K).

Inoltre, se $f(x) = \sum_{i=0}^{N} a_i x^i \in F[x]$ ha una radice $\alpha \in K$, allora

$0 = f(\alpha) = \sum_{i=0}^{N} a_i \alpha^i$ e quindi $0 = \varphi(0) = \varphi(f(\alpha)) = \varphi\left(\sum_{i=0}^{N} a_i \alpha^i\right) = \sum_{i=0}^{N} a_i \varphi(\alpha)^i = f(\varphi(\alpha))$,

dove la penultima uguaglianza è dovuta al fatto che φ sia un $F-$omomorfismo di campi. Ciò prova che φ invia ogni radice di $f(x)$ appartenente a K in una radice di $f(x)$ appartenente a $\widetilde{K}$. Pertanto φ induce un'ingezione (e dunque una bigezione) sull'insieme (finito!) delle radici di $f(x)$ appartenenti a $\widetilde{K}$.