TRAITÉ

DES SUBSTITUTIONS

ET

DES ÉQUATIONS ALGÉBRIQUES,

PAR M. CAMILLE JORDAN,

INGÉNIEUR DES MINES, DOCTEUR ÈS SCIENCES,
MEMBRE CORRESPONDANT DE LA SOCIÉTÉ ROYALE DES SCIENCES DE GOETTINGUE ET DE L'INSTITUT LOMBARD.

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE IMPÉRIALE POLYTECHNIQUE,
SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,
Quai des Augustins, 55.

—

1870

un groupe, contenant la moitié des substitutions possibles et permutable à toute substitution.

Ce groupe se nomme le *groupe alterné;* les fonctions qu'il laisse invariables sont dites *alternées*. La plus simple d'entre elles est le produit des différences des lettres $a, b, c, \ldots$.

Tout groupe qui contient le groupe alterné se confond avec lui ou renferme toutes les substitutions possibles. Car, s'il est plus général que le groupe alterné, son ordre est un multiple de l'ordre N de ce dernier groupe : il ne peut donc être inférieur à 2N.

80. Toute substitution circulaire entre trois lettres fait partie du groupe alterné, par définition. Réciproquement, *toute substitution du groupe alterné est un produit de substitutions circulaires entre trois lettres.* Car la substitution $S_1 = (abcd)(ef)$, par exemple, s'obtient en exécutant la substitution circulaire (abc), puis la substitution $(ad)(ef)$, laquelle est elle-même le produit des deux substitutions circulaires (ade) et (eaf).

81. *Si le nombre k des lettres est supérieur à 4, tout groupe auquel toute substitution est permutable contient le groupe alterné.* Car soient F un groupe auquel toute substitution soit permutable; S une de ses substitutions : chacune des substitutions semblables à S, étant la transformée de S par une certaine substitution, appartiendra à F. Nous allons en conclure que F contient le groupe alterné.

En effet, supposons en premier lieu que, parmi les cycles de S, il en existe un contenant plus de deux lettres. Soit, par exemple, $S = (abc\ldots d)(ef\ldots)\ldots$. Soient α, β, δ trois lettres quelconques; γ, ε, $\varphi, \ldots$ les autres : les substitutions $S_1 = (\alpha\beta\gamma\ldots\delta)(\varepsilon\varphi\ldots)\ldots$ et $S_2 = (\beta\alpha\gamma\ldots\delta)(\varepsilon\varphi\ldots)\ldots$, semblables à S, faisant partie de F, $S_2 S_1^{-1}$ en fera également partie; mais cette substitution se réduit à la substitution circulaire $(\alpha\beta\delta)$ entre les trois lettres arbitraires α, β, δ. Donc F contient toutes les substitutions circulaires entre trois lettres et toute substitution dérivée de celles-là : donc il contient le groupe alterné.

Si tous les cycles de S, (ab), (cd), $(ef), \ldots$ contiennent au plus deux lettres, soient α, β, γ, δ quatre lettres arbitraires; ε, $\varphi, \ldots$ les autres : F contiendra les deux substitutions $S_1 = (\alpha\beta)(\gamma\delta)(\varepsilon\varphi)\ldots$, $S_2 = (\alpha\gamma)(\beta\delta)(\varepsilon\varphi)\ldots$, et par suite $\Sigma = S_1 S_2 = (\alpha\delta)(\beta\gamma)$. Si $k > 4$, soit ζ une lettre arbitraire autre que α, β, γ, δ : F contiendra la substitution $\Sigma_1 = (\alpha\zeta)(\beta\gamma)$, semblable à Σ, et par suite la substitution $\Sigma\Sigma_1 = (\alpha\delta\zeta)$, dans laquelle α, δ, ζ sont trois lettres différentes quelconques; car le choix de ζ n'est pas limité par la condition d'être différent des lettres arbitraires β et γ. Donc, dans ce cas encore, F contiendra le groupe alterné.

Remarque. — Si $k = 4$, la proposition ci-dessus se trouve en défaut; car on vérifie aisément que le groupe d'ordre 4 dérivé de la substitution $S = (ab)(cd)$ et de ses transformées est permutable à toute substitution.

Théorèmes divers.

82. Théorème. — *Si un groupe* G, *n fois transitif, ne contient pas le groupe alterné, chacune de ses substitutions* (sauf l'unité) *déplacera plus de n lettres.*

En effet, supposons que G renferme une substitution S qui ne déplace pas plus de n lettres; il renfermera une substitution T remplaçant ces n lettres par n autres lettres quelconques; il renfermera donc $T^{-1}ST$, laquelle est l'une quelconque des substitutions semblables à S. Il contient donc le groupe alterné (81).

De ce théorème, dû à M. Mathieu, on déduit la proposition plus générale que voici :

83. Théorème. — *Si un groupe* G, *n fois transitif, ne contient pas le groupe alterné, chacune de ses substitutions* (sauf l'unité) *déplacera plus de* $2n - 4$ *lettres.*

Soit, en effet, $S = (abc\ldots)(def\ldots)(g\ldots)$ une substitution de G, laquelle déplace q lettres, q étant par hypothèse $< 2n - 3$. Soient $a, b, c, \ldots, d, e, f$, les n premières lettres de S, φ une lettre quelconque que S ne déplace pas. Le groupe G, étant n fois transitif, contient une substitution T qui ne déplace pas $a, b, c, \ldots, d, e$ et qui remplace f par φ. Soient $\gamma, \ldots$ les lettres par lesquelles elle remplace $g, \ldots$: G contiendra la substitution $T^{-1}ST = (abc\ldots)(de\varphi\ldots)(\gamma\ldots)$, et celle-ci $T^{-1}ST.S$, qui ne se réduit pas à l'unité, car elle déplace φ, et qui ne déplace que les lettres $e, \varphi, \ldots, \gamma, \ldots, f, \ldots, g, \ldots$, dont le nombre $2q - 2n + 3 = q'$ est inférieur à q.

De cette substitution on en déduirait une autre contenant q'' lettres, q'' étant $< q'$, etc., et l'on finirait par obtenir une substitution ne déplaçant que n lettres au plus. Donc G contiendra le groupe alterné (82).

Corollaire I. — *L'ordre d'un groupe* G *de degré k, n fois transitif et ne*