Algebra n. 3 - NOTE ALLA LEZIONE 18

Proposizione 18.8

Sia M un A-modulo noetheriano. Sia N un suo sottomodulo. Allora ogni catena di sottomoduli di N è una catena di sottomoduli di M, e dunque è stazionaria. Ciò prova che N è noetheriano.
Consideriamo ora il modulo quoziente M/N. Per il teorema di corrispondenza, ogni catena di suoi sottomoduli è della forma

$$L_0/N \subset L_1/N \subset \dots \subset L_i/N \subset \dots$$

ove, per ogni indice i, L_i è un sottomodulo di M contenente N. Poiché è stazionaria la catena

$$L_0 \subset L_1 \subset \cdots \subset L_i \subset \cdots$$

è stazionaria anche la catena precedente. Ciò prova che M/N è noetheriano.
<u>Vale anche il viceversa</u>: Sia M un A-modulo, e sia N un suo sottomodulo. Allora, se N e M/N sono noetheriani, tale è anche M.
Nella dimostrazione di questa parte, utilizziamo la condizione c). Sia L un sottomodulo di M. Allora sono A-moduli finitamente generati $L \cap N$, in quanto sottomodulo di N, e $L+N/N$, in quanto sottomodulo di M/N. Ma , per il secondo teorema di isomorfismo per i moduli, $L+N/N$ è isomorfo a $L/L \cap N$. Se $\{x_1, \dots, x_n\}$ e $\{y_1 + L\cap N, \dots, y_m + L\cap N\}$ sono sistemi di generatori di $L \cap N$ e $L/L \cap N$, rispettivamente, allora $\{x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m\}$ è un sistema di generatori di L (*), che dunque risulta finitamente generato. Ne consegue la noetherianità di M.

(*)
Sia $x \in L$. Allora esistono $a_1, \dots, a_m \in A$ tali che $x + L\cap N = \sum_{i=1}^{m} a_i (y_i + L\cap N) = \left(\sum_{i=1}^{m} a_i y_i\right) + L \cap N$, quindi tali che $x - \sum_{i=1}^{m} a_i y_i \in L \cap N$. Ma allora esistono $b_1, \dots, b_n \in A$ tali che $x - \sum_{i=1}^{m} a_i y_i = \sum_{i=1}^{n} b_i x_i$, ossia $x = \sum_{i=1}^{m} a_i y_i + \sum_{i=1}^{n} b_i x_i$.

Proposizione 18.9

La dimostrazione può avvenire per induzione sul numero n degli addendi diretti. Per illustrarla, è sufficiente presentare il caso in cui $n = 2$, che suggerisce il meccanismo del passo induttivo. Siano dunque M_1 e M_2 moduli noetheriani. Posto $M = M_1 \oplus M_2$, basta applicare il "viceversa" della Proposizione precedente dopo aver osservato che sussistono i seguenti isomorfismi:

$$M_1 \simeq M_1 \oplus M_2 / \{0\} \oplus M_2 \;, \; M_2 \simeq \{0\} \oplus M_2.$$

Dalla noetherianità di M_1 e M_2 segue allora immediatamente quella di *M*.

Osservazione 18.10

Per ogni indice *n*, il sottomodulo di *M*

$$\left\{(a_i)_{i\in\mathbb{N}} \middle| a_i = 0,\ \text{per ogni } i > n\right\}$$

viene identificato con $M_1 \oplus M_2 \oplus \cdots \oplus M_n$. Nella catena indicata, le inclusioni sono tutte strette, in quanto, per ogni *n*, detto *x* un elemento non nullo di M_n, si ha

$$(0,...,0,\underset{(n)}{x},0,...0,....) \in M_1 \oplus \cdots \oplus M_{n-1} \oplus M_n \setminus M_1 \oplus \cdots \oplus M_{n-1}.$$