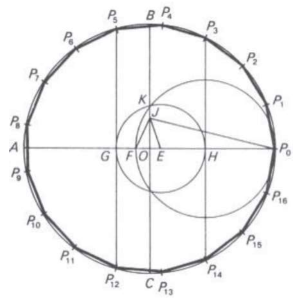
da: *Lezioni di matematica dagli scritti di Évariste Galois.* Vol. 3
di Margherita Barile, Sergio De Nuccio,
Edizioni Goliardiche, 2011

Nell'articolo *Recherches sur les moyens de reconnaître si un problème de géométrie peut se résoudre avec la règle et le compas*, pubblicato, nel 1837, da Pierre Laurent Wantzel nel *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, questo criterio di costruibilità con riga e compasso viene riformulato in termini di sistemi di equazioni algebriche. Nella sua trattazione, il concetto centrale è quello di *funzione* (o *espressione*) *razionale*. Dato un campo K ed un campo L di cui K è sottocampo, e dati un numero finito di elementi $x, y, ..., z,$ di L, si dice *funzione razionale* di $x, y, ..., z,$ a coefficienti nel campo K ogni frazione $\frac{f(x,y,...,z)}{g(x,y,...,z)}$, in cui $f(x,y,...,z)$ e $g(x,y,...,z)$ sono polinomi in $x, y,..., z,$ a coefficienti in K, e $g(x,y,...,z)$ è non nullo. L'insieme di tali frazioni è un sottocampo di L contenente K, denotato $K(x,y,...,z)$. Inoltre ogni funzione razionale degli elementi $x, y, ..., z, w$ di L a coefficienti in K può essere vista come una funzione razionale di w a coefficienti nel campo delle funzioni razionali di $x, y, ..., z$ a coefficienti in K; in simboli $K(x,y,...,z,w) = K(x,y,...,z)(w)$.
Nel seguito, il campo K sarà sempre il campo dei numeri razionali.

Il lavoro di Wantzel è il primo a dare una caratterizzazione completa degli interi positivi n per i quali il poligono regolare avente n lati è costruibile con riga e compasso. La sufficienza della condizione da lui trovata era già stata provata da Carl Friedrich Gauss nella Sezione VII delle *Disqusitiones Arithmeticae*, mentre la necessità era stata qui soltanto enunciata.
Le pagine che seguono contengono una traduzione fedele ed integrale del testo della memoria di Wantzel, corredata di note che ne illustrano in dettaglio, nell'attuale formalismo matematico, le varie argomentazioni.



La costruzione del poligono regolare con 17 lati secondo C. F. Gauss

Ricerche sugli strumenti per riconoscere se un problema di geometria si può risolvere con riga e compasso

del Signor L. Wantzel
Allievo ingegnere di ponti e strade

I.

Supponiamo che un problema di geometria si possa risolvere con l'intersezione di linee rette e di circonferenze; se si congiungono i punti così ottenuti con i centri delle circonferenze e con i punti che determinano le rette si formerà una concatenazione di triangoli rettilinei i cui elementi potranno essere calcolati con le formule della trigonometria; d'altronde queste formule sono delle equazioni algebriche che contengono i lati e le linee trigonometriche degli angoli soltanto al primo ed al secondo grado; pertanto l'incognita principale del problema si otterrà tramite la risoluzione di una serie di equazioni di secondo grado i cui coefficienti saranno funzioni razionali dei dati del problema e delle radici delle equazioni precedenti.[1] Di conseguenza, per riconoscere se la costruzione di un problema di geometria possa essere effettuata con riga e compasso, bisogna vedere se è possibile far dipendere le radici dell'equazione a cui esso conduce da quelle di un sistema di equazioni di secondo grado composte nel modo appena indicato. Noi qui tratteremo solamente il caso in cui l'equazione del problema è algebrica.[2]

[1] Nell'introduzione a questo capitolo abbiamo osservato che, nel piano cartesiano, i punti ottenuti (intersecando rette e circonferenze) nel corso di un procedimento di costruzione con riga e compasso sono individuati da coordinate che sono espressioni radico-razionali delle coordinate dei punti assegnati (o determinati ai passi precedenti). Se, ad esempio, sono assegnati i punti A di coordinate (0,0) e B di coordinate (1,0), ed il punto ottenuto per costruzione è C, di coordinate (a,b), allora a e b sono espressioni radico-razionali di 1. Notiamo che, in assenza di un sistema di riferimento cartesiano, il punto C può essere determinato considerando il triangolo ABC: precisamente, C è individuato dalla lunghezza del segmento AC e dall'ampiezza dell'angolo CAB. Ora, la prima è pari a $\sqrt{a^2+b^2}$, mentre la seconda è univocamente determinata dal coseno dell'angolo, che è pari a $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Entrambe queste misure sono funzioni radico-razionali di a e b, e quindi di 1. Pertanto, il criterio di risolubilità con riga e compasso da noi enunciato nell'introduzione può essere riferito, anziché alle coordinate cartesiane dei punti, alle lunghezze dei lati ed ai coseni (*linee trigonometriche*) degli angoli interni dei triangoli aventi per vertici i punti (vecchi e nuovi) del procedimento costruttivo.
[2] *Algebrica* qui significa: ottenuta uguagliando a zero un'espressione polinomiale (ad esempio, lineare o quadratica) dell'incognita.